Constraint-Satisfaction-Probleme

B. Nebel, S. Wölfl — Universität Freiburg
R. Mattmüller, M. Westphal — Institut für Informatik
Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 12

Abgabe: 27. Januar 2010

Aufgabe 12.1 (1+1+1 Punkte)

Die Punktalgebra ist das (binäre) Relationensystem $2^{\{<,=,>\}}$, wobei die Relationen $<$, $=$, $>$ auf einer Domäne wie üblich durch kleiner, gleich, größer interpretiert werden.

Seien die Domäne $D = \mathbb{Q}$ und das folgende qualitative CSP gegeben:

$$CSP = \Big\{ u\{<\}v,\ u\{<,=\}z,\ v\{=,>\}y,\ y\{<,=\}x,\ z\{>\}x,\ v\{<\}x \Big\}$$

(a) Stellen Sie für die Formelmenge CSP Pfadkonsistenz her. Ist CSP erfüllbar? Geben Sie ggf. eine erfüllende Belegung an.

(b) Stellen Sie für CSP zusammen mit $z\{<,=\}v$ Pfadkonsistenz her. Ist diese Formelmenge erfüllbar?

(c) Folgt aus CSP logisch $x\{>\}y$?

Aufgabe 12.2 (1+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Die Punktalgebra auf der Domäne $\mathbb{Q}$ ist abgeschlossen unter der Komposition von Basisrelationen.

(b) Zeigen Sie: Die Punktalgebra auf der Domäne $\mathbb{Z}$ ist *nicht* abgeschlossen unter der Komposition von Basisrelationen.

Aufgabe 12.3 (Ein Baumkalkül, 1+1+1 Punkte)

Wir betrachten folgende binären Relationen über den Knoten eines Binärbaums (mit Wurzelknoten):

$\equiv$: Beide Knoten sind identisch.
$\lhd$: Der erste Knoten ist ein echter Vorfahre des zweiten Knotens.
$\rhd$: Der zweite Knoten ist ein echter Vorfahre des ersten Knotens.
$\square$: Keiner der Knoten ist ein Vorfahre des anderen und der Wurzelknoten ist *nicht* der einzige gemeinsame Vorfahre der beiden Knoten.
$\blacksquare$: Keiner der Knoten ist ein Vorfahre des anderen und der Wurzelknoten ist der einzige gemeinsame Vorfahre der beiden Knoten.

(a) Begründen Sie, dass die Basisrelationen $\mathcal{B} = \{\equiv, \lhd, \rhd, \square, \blacksquare\}$ JEPD (jointly exhaustive and pairwise disjoint) sind und $\mathcal{B}$ unter Konversenbildung abgeschlossen sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T} := 2^{\mathcal{B}}$ nicht unter Komposition abgeschlossen ist.

(c) Seien $R, R' \in \mathcal{T}$. Die schwache Komposition $\circ_w$ in $\mathcal{T}$ ist definiert als das minimale Element von $\mathcal{T}$, das $R \circ R'$ enthält. Berechnen Sie die schwache Kompositionstabelle für $\mathcal{B}$ (d.h. berechnen Sie $R \circ_w R'$ für alle $R, R' \in \mathcal{B}$) und geben Sie eine (kurze) Begründung an, warum es ausreicht, die Komposition nur auf den Basisrelationen zu betrachten.

Es sind keine formalen Beweise für die Teile (a) und (c) notwendig.