Spieltheorie

Prof. Dr. B. Nebel, Dr. M. Helmert
Wintersemester 2007/2008

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 12 — Lösungen

Aufgabe 12.1 (Satz von Gibbard-Satterthwaite, 2 Punkte)

Zeigen Sie, ohne den Satz von Gibbard-Satterthwaite zu verwenden, dass es für $|A| \geq 3$ und beliebiges festes $a^* \in A$ keine anreizkompatible soziale Entscheidungsfunktion $f : L^n \to A$ geben kann mit

$$f(\prec_1, \dots, \prec_n) = \begin{cases} a, & \text{falls } b \prec_i a \text{ für alle } b \neq a \text{ und } i = 1, \dots, n \\ a^*, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung:

Seien $a, a^* \in A$, $a \neq a^*$. Angenommen, es ist $a^* \prec_1 a \prec_1 x$ für alle $x \in A \setminus \{a, a^*\}$ sowie $x \prec_i a$ für alle $x \in A \setminus \{a\}$ für $i = 2, \dots, n$. Dann ist $f(\prec_1, \dots, \prec_n) = a^*$, weil wegen $|A| \geq 3$ mindestens ein $x \in A$ existiert, das von Wähler 1 vor a präferiert wird. Sei $x \prec'_1 a^* \prec'_1 a$ für alle $x \in A \setminus \{a, a^*\}$. Dann ist $f(\prec'_1, \prec_2, \dots, \prec_n) = a \succ_1 a^* = f(\prec_1, \prec_2, \dots, \prec_n)$, d. h. f ist nicht anreizkompatibel.

Aufgabe 12.2 (Machtindizes, 6 Punkte)

Betrachten Sie das Wahlverfahren, bei dem $A = \{ja, nein\}$ ist, wo Wähler $i \in N = \{1, \dots, n\}$ das Stimmgewicht $w(i) \in \mathbb{N}$ hat, und wo $f(\prec_1, \dots, \prec_n) = ja$ gdw. $\sum_{i \in J} w(i) \geq \vartheta$ für $J = \{i \in N \mid nein \prec_i ja\}$ und einen vorgegebenen Schwellwert $\vartheta \in \mathbb{N}$.

(a) **Banzhafs Machtindex:** Eine Menge $S \subseteq N$ heißt *Erfolgskoalition*, wenn $\sum_{i \in S} w(i) \geq \vartheta$. Ein Paar $(S, S \setminus \{i\})$ mit $i \in S \subseteq N$ heißt *Erfolgskombination für Wähler i*, falls S eine Erfolgskoalition und $S \setminus \{i\}$ keine Erfolgskoalition ist. Sei δ_i die Anzahl der Erfolgskombinationen für Wähler i, und $\delta = \sum_{i \in N} \delta_i$. *Banzhafs Machtindex für Wähler i* ist dann der Wert $\beta_i = \delta_i / \delta$. Berechnen Sie die Machtindizes für $i = 1, \dots, 4$, wenn $w(1) = 4$, $w(2) = 4$, $w(3) = 2$, $w(4) = 1$ und $\vartheta_1 = 6$ bzw. $\vartheta_2 = 7$.

Lösung:

Berechnen wir zunächst die Machtindizes für $\vartheta_1 = 6$. Um die Erfolgskombinationen kompakt darstellen zu können, notieren wir jede Erfolgskoalition S durch die Zeichenkette aus den Nummern der beteiligten Wähler und unterstreichen in dieser Zeichenkette einen Spieler i genau dann, wenn $S \setminus \{i\}$ keine Erfolgskoalition mehr ist, wenn also $(S, S \setminus \{i\})$ eine Erfolgskombination für Wähler i ist. Die Erfolgskoalitionen bzw. -kombinationen sind

$\underline{1}\,\underline{2}$ $(8, 4, 4)$	$\underline{1}\,\underline{3}$ $(6, 2, 4)$	$\underline{2}\,\underline{3}$ $(6, 2, 4)$	$1\,2\,3$ (10)
$\underline{1}\,\underline{2}\,4$ $(9, 5, 5)$	$\underline{1}\,\underline{3}\,4$ $(7, 3, 5)$	$\underline{2}\,\underline{3}\,4$ $(7, 3, 5)$	$1\,2\,3\,4$ (11)

In Klammern sind immer die Summen $\sum_{j \in S} w(j)$ gefolgt von den Summen $\sum_{j \in S \setminus \{i\}} w(j)$ für die unterstrichenen Spieler i angegeben.
Damit sind $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 4$, $\delta_4 = 0$ und $\delta = 12$, also $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{3}$ und $\beta_4 = 0$. Es fällt auf, dass Wähler 3, obwohl er nur halb so viele Stimmen wie Wähler 1 und 2 hat, gleich viel Macht wie diese beiden Wähler besitzt, weil seine Stimme genauso oft für den Wahlausgang ausschlaggebend ist (nämlich bei vier möglichen Konstellationen) wie die Stimmen der Wähler 1 und 2. Die Stimme von Wähler 4 verschafft diesem dagegen überhaupt keine Macht, weil keine Situation auftreten kann, in der diese eine Stimme über den Wahlausgang entscheidet. Die Stimme von Wähler 4 ist in allen denkbaren Fällen irrelevant.
Wählt man $\vartheta_2 = 7$, so sieht man, dass sich bei gleichen Wählern und gleichen Stimmgewichten nur durch Änderung von ϑ die Machtindizes ändern können. Die Erfolgskoalitionen bzw. -kombinationen sind

$\underline{1}\,\underline{2}$ $(8, 4, 4)$	$\underline{1}\,\underline{2}\,3$ $(10, 6, 6)$	$\underline{1}\,\underline{2}\,4$ $(9, 5, 5)$
$\underline{1}\,\underline{3}\,\underline{4}$ $(7, 3, 5, 6)$	$\underline{2}\,\underline{3}\,\underline{4}$ $(7, 3, 5, 6)$	$1\,2\,3\,4$ (11)

Damit sind $\delta_1 = \delta_2 = 4$, $\delta_3 = \delta_4 = 2$ und $\delta = 12$, also $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{3}$ und $\beta_3 = \beta_4 = \frac{1}{6}$. Wähler 4 hat nun also wieder einen Machtindex größer als 0, weil er in der Situation, in der Wähler 1 und 3 für *ja* und Wähler 2 für *nein* stimmen, mit seiner Stimme den Ausgang bestimmt. Das gleiche gilt, wenn Wähler 2 und 3 für *ja* und Wähler 1 für *nein* stimmen.

(b) **Absoluter Penrose-Banzhaf-Index und das Quadratwurzelgesetz:**
Der *absolute Penrose-Banzhaf-Index für Wähler* i ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Stimme von Wähler i entscheidend ist, also $B_i = \delta_i / 2^{n-1}$. Zeigen Sie, dass für uniforme Stimmgewichte $w(i) = 1$ für $i = 1, \ldots, n$ und $n = 2k + 1$ sowie $\vartheta = \lceil \frac{n}{2} \rceil = k + 1$ die absoluten Penrose-Banzhaf-Indizes aller Wähler jeweils (näherungsweise) den Wert $(\sqrt{\pi k})^{-1}$ haben, also proportional zu $1/\sqrt{n}$ sind.
Hinweis: Berechnen Sie, auf wieviele Arten sich für einen festen Wähler i die $2k$ anderen Wähler entscheiden können, und in wie vielen dieser Fälle die Stimme von Wähler i entscheidend ist. Verwenden Sie die Stirlingsche Formel $k! \approx k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{k}$.
Lösung:
Es gibt 2^{2k} Möglichkeiten, wie sich die $2k$ *anderen* Wähler entscheiden können. Von diesen Möglichkeiten interessieren wir uns für die, bei denen Stimmengleichheit herrscht und damit die Stimme des vorher fixierten Wählers i entscheidend ist. Das ist genau in

$$\delta_i = \binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k!k!}$$

Situationen der Fall, da es genau so viele Möglichkeiten gibt, aus den $2k$ anderen Wählern die k auszuwählen, die mit *ja* stimmen. Der Index B_i ist definiert als $\delta_i / 2^{n-1}$. Zusammen mit der Stirlingschen Formel erhalten wir also

$$B_i = \frac{(2k)!}{k!k! \cdot 2^{2k}} \approx \frac{(2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{2\pi} \sqrt{2k}}{(k^k e^{-k} \sqrt{2\pi} \sqrt{k})^2 \cdot 2^{2k}} = \frac{2^{2k} k^{2k} e^{-2k} 2 \sqrt{\pi} \sqrt{k}}{k^{2k} e^{-2k} 2\pi k 2^{2k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}.$$