

Spieltheorie

Prof. Dr. B. Nebel, Dr. M. Helmert
Wintersemester 2007/2008

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 11 — Lösungen

Aufgabe 11.1 (Kriterien an soziale Entscheidungsfunktionen)

Betrachten Sie die sozialen Entscheidungsfunktionen **relative Mehrheitswahl**, **Präferenz-Wahl** und **Borda-Wahl** (vgl. Blatt 10) Wir nehmen wieder an, dass bei Gleichständen immer der Kandidat mit niedrigerem Index gewinnt, und dass $|A| \geq 3$ gilt. Betrachten Sie ferner die folgenden Kriterien:

Mehrheitskriterium: Gilt für mehr als die Hälfte aller Wähler i , dass $b \prec_i a$ für alle $b \in A \setminus \{a\}$, so ist $f(\prec_1, \dots, \prec_n) = a$.

Umgekehrte Symmetrie: Ist $f(\prec_1, \dots, \prec_n) = a$, so ist $f(\prec'_1, \dots, \prec'_n) \neq a$, wenn $a \prec'_i b$ gdw. $b \prec_i a$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $a, b \in A$.

Anreizkompatibilität: Es gilt $f(\prec_1, \dots, \prec'_i, \dots, \prec_n) \preceq_i f(\prec_1, \dots, \prec_i, \dots, \prec_n)$ für alle $\prec_1, \dots, \prec_n, \prec'_i \in L$.

Zeigen Sie für jedes Paar aus Wahlverfahren und Kriterium, dass das Verfahren das Kriterium erfüllt oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Lösung:

In der folgenden Tabelle bezeichnet **R** die relative Mehrheitswahl, **P** die Präferenzwahl, **B** die Borda-Wahl, **M** das Mehrheitskriterium, **U** die umgekehrte Symmetrie und **A** die Anreizkompatibilität.

		Wahlverfahren		
		R	P	B
Kriterium	M	ja (1)	ja (4)	nein (7)
	U	nein (2)	nein (5)	nein (8)
	A	nein (3)	nein (6)	nein (9)

In der folgenden Liste der Beweise und Gegenbeispiele schreiben wir zur Vereinfachung häufig anstelle von Ausdrücken der Form $c \prec_i b \prec_i a$ abkürzend abc .

- Mehrheitskriterium bei relativer Mehrheitswahl:** Klar, denn wenn ein Kandidat eine absolute Mehrheit hat, dann hat er auch eine relative Mehrheit.
- Umgekehrte Symmetrie bei relativer Mehrheitswahl:** Angenommen, vier Wähler haben die Präferenzen acb , abc , cba und bca über den Kandidaten a , b und c . Dann gewinnt Kandidat a sowohl für die ursprünglichen als auch für die invertierten Präferenzen.
- Anreizkompatibilität bei relativer Mehrheitswahl:** Angenommen, vier Wähler haben die Präferenzen abc , cba , cba und bac über den Kandidaten a , b und c . Dann gewinnt Kandidat c die Wahl. Gibt der erste Wähler statt abc als Präferenz bac an, so gewinnt Kandidat b , der dem abweichenden Wähler lieber ist als der ursprüngliche Gewinner c .

- (d) **Mehrheitskriterium bei Präferenzwahl:** Induktion über Anzahl der verbleibenden Kandidaten. Falls nur noch ein Kandidat übrig ist, ist klar, dass mit ihm ein Kandidat mit der absoluten Mehrheit der ersten Plätze in den Präferenzrelationen gewählt wird. Sind noch $m + 1$ Kandidaten übrig und hat Kandidat a von den n Wählern n' erste Plätze in den Präferenzrelationen, wobei $n' > \frac{n}{2}$, so wird ein Kandidat $b \neq a$ gestrichen. Dies hat aber keine Auswirkungen auf die ersten Plätze in den n' für Kandidaten a günstigen Präferenzrelationen. Also hat Kandidat a im nächsten Schritt *mindestens* n' erste Plätze in den Präferenzrelationen und die Induktionsannahme kann angewandt werden.
- (e) **Umgekehrte Symmetrie bei Präferenzwahl:** Zwei Wähler haben die Präferenzen ab , und ba über den Kandidaten a und b . Dann gewinnt Kandidat a sowohl für die ursprünglichen als auch für die invertierten Präferenzen.
- (f) **Anreizkompatibilität bei Präferenzwahl:** Angenommen, wir haben die Kandidaten a , b und c sowie fünf Wähler mit Präferenz abc , drei Wähler mit Präferenz bca und vier Wähler mit Präferenz cab . Dann setzt sich in einer Stichwahl zwischen a und c der Kandidat c durch. Gibt nun einer der fünf Wähler mit Präferenz abc seine Präferenz fälschlich als bac an, so kommt es zu einer Stichwahl zwischen a und b , die a gewinnt. Dieser Ausgang ist dem Wähler, der seine Präferenz falsch angibt, lieber als der Ausgang c bei wahrer Präferenzangabe.
- (g) **Mehrheitskriterium bei Borda-Wahl:** Angenommen, es gibt vier Kandidaten a , b , c und d und drei Wähler mit Präferenzen $abcd$, $abcd$ und $bcda$. Dann hat Kandidat a eine absolute Mehrheit erster Plätze in den Präferenzrelationen, gewinnt die Wahl aber dennoch nicht, weil a , b , c und d die Punktzahlen 6, 7, 4 und 1 erhalten, b also die meisten Punkte bekommt.
- (h) **Umgekehrte Symmetrie bei Borda-Wahl:** Angenommen, es gibt zwei Kandidaten a und b sowie zwei Wähler mit Präferenzen ab und ba . Sowohl bei den ursprünglichen als auch bei den invertierten Präferenzen erhalten beide Kandidaten je einen Punkt, es gewinnt wegen des Tie-Breaking-Kriteriums also in beiden Fällen der gleiche Kandidat a .
- (i) **Anreizkompatibilität bei Borda-Wahl:** Angenommen, es gibt drei Kandidaten a , b und c sowie drei Wähler mit Präferenzen abc , bca und cab . Dann gewinnt wegen des Tie-Breaking-Kriteriums Kandidat a . Gibt allerdings der zweite Wähler seine Präferenz mit cba statt mit bca an, so gewinnt Kandidat c , der dem zweiten Wähler lieber ist als Kandidat a .

Aufgabe 11.2 (Verfahren von Kemeny-Young)

Das Verfahren von Kemeny-Young ist die soziale Wohlfahrtsfunktion $F : L^n \rightarrow L$, so dass für $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ und Eingabe $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$ gilt:

- $S_\pi(a, b) := |\{i \mid a \prec_i b\}|$ für alle $a, b \in A$, $a \neq b$, ist die Anzahl der Wähler, die b gegenüber a bevorzugen.
 - $S_\pi(\prec) = \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m S_\pi(b_j, b_k)$ für alle $\prec = (b_1, \dots, b_m) \in L$.
 - $F(\pi) = \arg \max_{\prec \in L} S_\pi(\prec)$, etwa mit Präzedenz in der lexikographischen Sortierung als Tie-Breaking-Regel, wenn $\arg \max$ nicht eindeutig ist.
- (a) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass das Verfahren von Kemeny-Young die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen verletzt.

Lösung:

Sei $m = 3$, $n = 4$ und seien die Präferenzprofile π und π' der Wähler wie folgt:

$$\begin{array}{ll} c \prec_1 b \prec_1 a & b \prec'_1 c \prec'_1 a \\ b \prec_2 a \prec_2 c & b \prec'_2 c \prec'_2 a \\ a \prec_3 c \prec_3 b & c \prec'_3 a \prec'_3 b \\ a \prec_4 c \prec_4 b & a \prec'_4 b \prec'_4 c \end{array}$$

Es gilt $a \prec_i b$ gdw. $a \prec'_i b$ für alle Wähler i , der Kandidat c ist die irrelevante Alternative. Wir erhalten die folgenden Bewertungen der paarweisen Präferenzen

$$\begin{array}{llll} S_\pi(a, b) = 2 & S_\pi(b, a) = 2 & S_{\pi'}(a, b) = 2 & S_{\pi'}(b, a) = 2 \\ S_\pi(a, c) = 3 & S_\pi(c, a) = 1 & S_{\pi'}(a, c) = 1 & S_{\pi'}(c, a) = 3 \\ S_\pi(b, c) = 1 & S_\pi(c, b) = 3 & S_{\pi'}(b, c) = 3 & S_{\pi'}(c, b) = 1 \end{array}$$

und damit die folgenden Bewertungen aller linearen Ordnungen über A :

$$\begin{array}{ll} S_\pi(a \prec b \prec c) = 2 + 3 + 1 = 6 & S_{\pi'}(a \prec b \prec c) = 2 + 1 + 3 = 6 \\ S_\pi(a \prec c \prec b) = 3 + 2 + 3 = 8 & S_{\pi'}(a \prec c \prec b) = 1 + 2 + 1 = 4 \\ S_\pi(b \prec a \prec c) = 2 + 1 + 3 = 6 & S_{\pi'}(b \prec a \prec c) = 2 + 3 + 1 = 6 \\ S_\pi(b \prec c \prec a) = 1 + 2 + 1 = 4 & S_{\pi'}(b \prec c \prec a) = 3 + 2 + 3 = 8 \\ S_\pi(c \prec a \prec b) = 1 + 3 + 2 = 6 & S_{\pi'}(c \prec a \prec b) = 3 + 1 + 2 = 6 \\ S_\pi(c \prec b \prec a) = 3 + 1 + 2 = 6 & S_{\pi'}(c \prec b \prec a) = 1 + 3 + 2 = 6 \end{array}$$

Also ist $\text{KemenyYoung}(\pi) = \prec$ mit $a \prec c \prec b$ und $\text{KemenyYoung}(\pi') = \prec'$ mit $b \prec' c \prec' a$, insbesondere unterscheiden sich \prec und \prec' also in der Anordnung der Kandidaten a und b . Also ist das Verfahren von Kemeny-Young nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen.

- (b) Implementieren Sie das Verfahren von Kemeny-Young in einer Programmiersprache Ihrer Wahl (vorzugsweise Java, C, C++; sonst ggf. vorher nachfragen). Welche Ausgabe erhalten Sie für die folgende Eingabe?

25 Wähler haben die Präferenz $b \prec_i a \prec_i d \prec_i e \prec_i c$
 12 Wähler haben die Präferenz $e \prec_i d \prec_i c \prec_i b \prec_i a$
 11 Wähler haben die Präferenz $c \prec_i e \prec_i a \prec_i b \prec_i d$
 14 Wähler haben die Präferenz $d \prec_i a \prec_i b \prec_i e \prec_i c$
 18 Wähler haben die Präferenz $e \prec_i b \prec_i d \prec_i c \prec_i a$
 10 Wähler haben die Präferenz $c \prec_i d \prec_i a \prec_i e \prec_i b$
 10 Wähler haben die Präferenz $c \prec_i d \prec_i e \prec_i b \prec_i a$

Lösung:

Eine mögliche Implementierung in Java kann von der Vorlesungs-Website heruntergeladen werden. Die aus der obigen Eingabe π resultierende aggregierte Präferenzrelation ist \prec mit $d \prec e \prec b \prec c \prec a$ mit der Bewertung $S_\pi(\prec) = 602$.