Spieltheorie

Prof. Dr. B. Nebel, Dr. M. Helmert
Wintersemester 2007/2008

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 10 — Lösungen

Aufgabe 10.1 (Extensive Spiele mit simultanen Zügen, 4 Punkte)

Betrachten Sie die Variante von Bach-oder-Strawinsky, bei der zunächst Spielerin 1 sich entscheidet, zuhause zu bleiben und ein Buch zu lesen (Aktion *Buch*) oder ein Konzert zu besuchen (Aktion *Konzert*). Falls sie ein Buch liest, endet das Spiel, sonst entscheiden sich Spielerin 1 und Spieler 2 wie bei der einfachen Variante von Bach-oder-Strawinsky unabhängig voneinander für eines der beiden Konzerte (Aktionen B und S). Beide ziehen einen gemeinsamen Besuch des Konzerts ihres jeweiligen Lieblingskomponisten dem Spielausgang vor, in dem Spielerin 1 zuhause bleibt und ein Buch liest, und bevorzugen diesen Ausgang gegenüber einem gemeinsamen Besuch des Konzerts des weniger geschätzten Komponisten. Der schlechteste Ausgang für beide liegt vor, wenn sie unterschiedliche Konzerte besuchen.

(a) Formalisieren Sie diese Situation als extensives Spiel mit perfekter Information und simultanen Zügen.

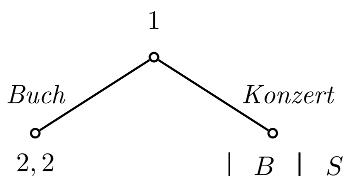
Lösung:

Das Spiel kann formalisiert werden als $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$, wobei

- Spielermenge: $N = \{1, 2\}$.
- Terminale Historien: $Z = \{\langle \mathit{Buch} \rangle, \langle \mathit{Konzert}, (B, B) \rangle, \langle \mathit{Konzert}, (B, S) \rangle, \langle \mathit{Konzert}, (S, B) \rangle, \langle \mathit{Konzert}, (S, S) \rangle\}$.
- Historien: $H = Z \cup \{\langle\rangle, \langle \mathit{Konzert} \rangle\}$.
- Spielerfunktion: $P(\langle\rangle) = 1$ und $P(\langle \mathit{Konzert} \rangle) = \{1, 2\}$.
- Aktionen: Die Aktionsmengen sind $A_1(\langle\rangle) = \{\mathit{Buch}, \mathit{Konzert}\}$ und $A_1(\langle \mathit{Konzert} \rangle) = A_2(\langle \mathit{Konzert} \rangle) = \{B, S\}$.
- Die Nutzenfunktionen sind:

$$
\begin{aligned}
u_1(\langle \mathit{Buch} \rangle) &= 2 & u_2(\langle \mathit{Buch} \rangle) &= 2 \\
u_1(\langle \mathit{Konzert}, (B, B) \rangle) &= 3 & u_2(\langle \mathit{Konzert}, (B, B) \rangle) &= 1 \\
u_1(\langle \mathit{Konzert}, (B, S) \rangle) &= 0 & u_2(\langle \mathit{Konzert}, (B, S) \rangle) &= 0 \\
u_1(\langle \mathit{Konzert}, (S, B) \rangle) &= 0 & u_2(\langle \mathit{Konzert}, (S, B) \rangle) &= 0 \\
u_1(\langle \mathit{Konzert}, (S, S) \rangle) &= 1 & u_2(\langle \mathit{Konzert}, (S, S) \rangle) &= 3
\end{aligned}
$$

Grafisch kann man sich das Spiel so veranschaulichen:



	B	S
B	$3, 1$	$0, 0$
S	$0, 0$	$1, 3$

(b) Hat das Spiel teilspielperfekte Gleichgewichte? Wenn ja, welche?

Lösung:

Das Spiel besitzt genau zwei teilspielperfekte Gleichgewichte.
In dem Teilspiel $\Gamma(\langle \mathit{Konzert} \rangle)$ gibt es zwei Nash-Gleichgewichte (bzw. teilspielperfekte Gleichgewichte), nämlich (B, B) und (S, S), also die aus der Standard-Variante von Bach-oder-Strawinsky bekannten Nash-Gleichgewichte.
Im gesamten Spiel hat Spielerin 1 die Strategien (Buch, B), (Buch, S), $(\mathit{Konzert}, B)$ und $(\mathit{Konzert}, S)$, und Spieler 2 hat die Strategien B und S.
Die strategische Form von Γ ist also durch die folgende Matrix gegeben:

		Sp. 2 B	Sp. 2 S
Sp. 1	(Buch, B)	$2, 2$	$2, 2$
	(Buch, S)	$2, 2$	$2, 2$
	$(\mathit{Konzert}, B)$	$3, 1$	$0, 0$
	$(\mathit{Konzert}, S)$	$0, 0$	$1, 3$

Die Nash-Gleichgewichte in diesem Spiel sind $((\mathit{Buch}, B), S)$, $((\mathit{Buch}, S), S)$ und $((\mathit{Konzert}, B), B)$. Davon sind die beiden Profile $((\mathit{Buch}, S), S)$ und $((\mathit{Konzert}, B), B)$ mit den Nash-Gleichgewichten (S, S) bzw. (B, B) von $\Gamma(\langle \mathit{Konzert} \rangle)$ konsistent, also sind dies die teilspielperfekten Gleichgewichte von Γ.
In diesem Spiel hätte man die teilspielperfekten Gleichgewichte ebenso gut durch Rückwärtsinduktion ermitteln können und wäre zu demselben Ergebnis gekommen, denn in dem Fall, dass in $\Gamma(\langle \mathit{Konzert} \rangle)$ das Gleichgewicht (B, B) gewählt wird, ist die einzige beste Aktion von Spielerin 1 an der Wurzel des Spielbaums die Aktion *Konzert*, während im Fall von (S, S) die Aktion *Buch* allein optimal ist.

Aufgabe 10.2 (Wahlverfahren, 4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Wahlverfahren (zur Vereinfachung nehmen wir an, dass bei Gleichständen immer der Kandidat mit niedrigerem Index gewinnt):

Relative Mehrheitswahl: Gewählt ist der Kandidat, der mehr erste Plätze in den Präferenzrelationen der Wähler hat als jeder andere Kandidat.

Präferenz-Wahl: Solange noch mehr als ein Kandidat übrig ist, streiche den Kandidaten, der von den *wenigsten* Wählern auf den *ersten* Platz gewählt wurde und schränke die Präferenzrelationen der Wähler auf die verbleibenden Kandidaten ein. Gewählt ist der letzte verbleibende Kandidat.

Coombs-Wahl: Wie Präferenz-Wahl, jedoch wird immer der Kandidat gestrichen, der von den *meisten* Wählern auf den *letzten* Platz gewählt wurde.

Borda-Wahl: Ein Kandidat erhält von jedem der n Wähler $m - j$ Punkte, wenn dieser ihn auf Platz j gewählt hat. Gewonnen hat der Kandidat mit der höchsten Summe von Punkten.

Geben Sie Präferenzrelationen $\prec_1, \dots, \prec_n$ über einer Kandidatenmenge $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ an, so dass die oben genannten Wahlverfahren möglichst viele unterschiedliche Gewinner liefern. Sie erhalten einen Punkt pro unterschiedlichem Gewinner.

Lösung:

Seien die Präferenzrelationen von acht Wählern $W_1, \ldots, W_8$ über den Kandidaten $a_1, \ldots, a_4$ durch die folgende Tabelle gegeben. Dabei ist $a_j \succ_i a_k$ gdw. $a_k \prec_i a_j$.

$$\begin{array}{ll}
W_1: & a_2 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_5 \succ a_1 \\
W_2: & a_2 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_5 \succ a_1 \\
W_3: & a_1 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5 \\
W_4: & a_1 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5 \\
W_5: & a_1 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5 \\
W_6: & a_4 \succ a_2 \succ a_5 \succ a_1 \succ a_3 \\
W_7: & a_5 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_1 \\
W_8: & a_5 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_1
\end{array}$$

Bei diesen Präferenzen liefern alle vier Verfahren unterschiedliche Gewinner:

Relative Mehrheitswahl: Hier gewinnt Kandidat a_1, weil er drei Stimmen erhält, während die Kandidaten a_2, a_3, a_4 und a_5 nur zwei, null, eine und zwei Stimmen bekommen.

Präferenz-Wahl: Im ersten Schritt wird Kandidat a_3 als der Kandidat mit den wenigsten ersten Plätzen („Stimmen") gestrichen und es bleiben die folgenden eingeschränkten Präferenzrelationen übrig:

$$\begin{array}{ll}
W_1: & a_2 \succ a_4 \succ a_5 \succ a_1 \\
W_2: & a_2 \succ a_4 \succ a_5 \succ a_1 \\
W_3: & a_1 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5 \\
W_4: & a_1 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5 \\
W_5: & a_1 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5 \\
W_6: & a_4 \succ a_2 \succ a_5 \succ a_1 \\
W_7: & a_5 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_1 \\
W_8: & a_5 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_1
\end{array}$$

Im zweiten Schritt wird Kandidat a_4 eliminiert und es bleiben die Präferenzen

$$\begin{array}{ll}
W_1: & a_2 \succ a_5 \succ a_1 \\
W_2: & a_2 \succ a_5 \succ a_1 \\
W_3: & a_1 \succ a_2 \succ a_5 \\
W_4: & a_1 \succ a_2 \succ a_5 \\
W_5: & a_1 \succ a_2 \succ a_5 \\
W_6: & a_2 \succ a_5 \succ a_1 \\
W_7: & a_5 \succ a_2 \succ a_1 \\
W_8: & a_5 \succ a_2 \succ a_1
\end{array}$$

In der dritten Runde scheidet Kandidat a_5 aus:

$$\begin{array}{ll}
W_1: & a_2 \succ a_1 \\
W_2: & a_2 \succ a_1 \\
W_3: & a_1 \succ a_2 \\
W_4: & a_1 \succ a_2 \\
W_5: & a_1 \succ a_2 \\
W_6: & a_2 \succ a_1 \\
W_7: & a_2 \succ a_1 \\
W_8: & a_2 \succ a_1
\end{array}$$

Eliminiert man nun noch Kandidaten a_1, so bleibt nur Kandidat a_2 übrig und gewinnt die Wahl.

Coombs-Wahl: Im ersten Schritt wird Kandidat a_1 gestrichen, da er am häufigsten auf dem letzten Platz liegt.

$$\begin{array}{rl} W_1: & a_2 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_5 \\ W_2: & a_2 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_5 \\ W_3: & a_3 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5 \\ W_4: & a_3 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5 \\ W_5: & a_3 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5 \\ W_6: & a_4 \succ a_2 \succ a_5 \succ a_3 \\ W_7: & a_5 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_2 \\ W_8: & a_5 \succ a_3 \succ a_4 \succ a_2 \end{array}$$

Nun liegt Kandidat a_5 am häufigsten auf dem letzten Platz und wird deshalb gestrichen:

$$\begin{array}{rl} W_1: & a_2 \succ a_4 \succ a_3 \\ W_2: & a_2 \succ a_4 \succ a_3 \\ W_3: & a_3 \succ a_4 \succ a_2 \\ W_4: & a_3 \succ a_4 \succ a_2 \\ W_5: & a_3 \succ a_4 \succ a_2 \\ W_6: & a_4 \succ a_2 \succ a_3 \\ W_7: & a_3 \succ a_4 \succ a_2 \\ W_8: & a_3 \succ a_4 \succ a_2 \end{array}$$

In der dritten Runde scheidet Kandidat a_2 aus und es bleiben die Präferenzen

$$\begin{array}{rl} W_1: & a_4 \succ a_3 \\ W_2: & a_4 \succ a_3 \\ W_3: & a_3 \succ a_4 \\ W_4: & a_3 \succ a_4 \\ W_5: & a_3 \succ a_4 \\ W_6: & a_4 \succ a_3 \\ W_7: & a_3 \succ a_4 \\ W_8: & a_3 \succ a_4 \end{array}$$

Schließlich muss Kandidat a_4 gestrichen werden und Kandidat a_3 gewinnt die Wahl.

Borda-Wahl: Bei der Borda-Wahl erhalten die Kandidaten die folgenden Punkte:

Kandidat	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Punkte	13	16	19	20	12

Also gewinnt Kandidat a_4 die Wahl.

Also haben wir bei festgelegten Präferenzen der Wähler bei vier unterschiedlichen Wahlverfahren vier unterschiedliche Gewinner.