

Spieltheorie

Prof. Dr. B. Nebel, Dr. M. Helmert
Wintersemester 2007/2008

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 8 — Lösungen

Aufgabe 8.1 (Extensive Spiele, Modellierung, 4 Punkte)

Die politischen Akteure Rosa (R) und Ernesto (E) müssen entweder Berlin (b) oder Havanna (h) als Ort für einen Parteitag auswählen. Sie entscheiden sich nacheinander; eine dritte Person, Karl (K), bestimmt, wer zuerst auswählt (Aktionen r und e). Sowohl Rosa als auch Ernesto ist es bei der Bewertung der terminalen Historien egal, in welcher Reihenfolge, jedoch nicht, wie die Auswahlen getroffen wurden. Rosa bevorzugt einen Ausgang, in dem sowohl sie als auch Ernesto b wählen (Nutzen $+2$), gegenüber einem, in dem beide h wählen (Nutzen $+1$), und den beiden Ausgängen, in denen sie unterschiedliche Auswahlen treffen (Nutzen 0). Ernestos Präferenzen unterscheiden sich von Rosas nur dadurch, dass die Rollen von b und h vertauscht sind. Karls Präferenzen sind identisch mit denen von Ernesto.

- (a) Modellieren Sie diese Situation als extensives Spiel mit perfekter Information und geben Sie den Spielbaum an.

Lösung:

Das Spiel kann als $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ modelliert werden, wobei

$$N = \{R, E, K\}$$

$$H = \{\langle \rangle, \langle r \rangle, \langle r, b \rangle, \langle r, b, b \rangle, \langle r, b, h \rangle, \\ \langle r, h \rangle, \langle r, h, b \rangle, \langle r, h, h \rangle, \\ \langle e \rangle, \langle e, b \rangle, \langle e, b, b \rangle, \langle e, b, h \rangle, \\ \langle e, h \rangle, \langle e, h, b \rangle, \langle e, h, h \rangle\}$$

$$P = \{\langle \rangle \mapsto K, \langle r \rangle \mapsto R, \langle r, b \rangle \mapsto E, \langle r, h \rangle \mapsto E, \\ \langle e \rangle \mapsto E, \langle e, b \rangle \mapsto R, \langle e, h \rangle \mapsto R\}$$

$$u_R(\langle r, b, h \rangle) = u_R(\langle r, h, b \rangle) = u_R(\langle e, b, h \rangle) = u_R(\langle e, h, b \rangle) = 0$$

$$u_R(\langle r, h, h \rangle) = u_R(\langle e, h, h \rangle) = 1$$

$$u_R(\langle r, b, b \rangle) = u_R(\langle e, b, b \rangle) = 2$$

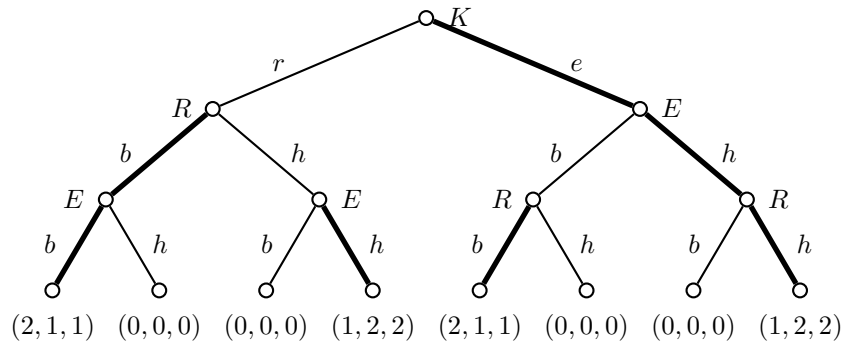
$$u_E(\langle r, b, h \rangle) = u_E(\langle r, h, b \rangle) = u_E(\langle e, b, h \rangle) = u_E(\langle e, h, b \rangle) = 0$$

$$u_E(\langle r, b, b \rangle) = u_E(\langle e, b, b \rangle) = 1$$

$$u_E(\langle r, h, h \rangle) = u_E(\langle e, h, h \rangle) = 2$$

$$u_K(k) = u_E(k) \text{ für alle } k \in Z.$$

Der Spielbaum sieht wie folgt aus. Die Nutzenwerte in den Nutzenprofilen sind in der Form (u_R, u_E, u_K) angegeben. Die fettgedruckten Kanten entsprechen einem teilspielperfekten Gleichgewicht (s.u.).



(b) Geben Sie die Menge von Rosas Strategien an.

Lösung:

Rosa hat acht unterschiedliche Strategien, nämlich (in der üblichen Kurzschreibweise) bbb , bbh , bhb , bhh , hbb , hbh , hbb und hhh , also alle möglichen Kombinationen von Aktionen in Historien, in denen Rosa am Zug ist. Die Kurzschreibweise ist so zu verstehen, dass die Aktionen für die Historien $k \in H \setminus Z$ mit $P(k) = R$ im Spielbaum in Breitensuch-Reihenfolge angegeben sind; beispielsweise steht bhb für $\{\langle r \rangle \mapsto b, \langle e, b \rangle \mapsto h, \langle e, h \rangle \mapsto b\}$.

(c) Bestimmen Sie ein teilspielperfektes Gleichgewicht.

Lösung:

Das einzige teilspielperfekte Gleichgewicht in diesem Spiel besteht aus den Strategien, die in der Abbildung zu Aufgabenteil (a) durch dickere Kanten dargestellt sind, d. h. $s^* = (s_R^*, s_E^*, s_K^*)$ mit

$$\begin{aligned} s_R^* &= \{\langle r \rangle \mapsto b, \langle e, b \rangle \mapsto b, \langle e, h \rangle \mapsto h\} = bhh, \\ s_E^* &= \{\langle e \rangle \mapsto h, \langle r, b \rangle \mapsto b, \langle r, h \rangle \mapsto h\} = hbh, \text{ und} \\ s_K^* &= \{\langle \rangle \mapsto e\} = e. \end{aligned}$$

Der Ausgang ist $O(s^*) = \langle e, h, h \rangle$ und Nutzenprofil in $O(s^*)$ beträgt $(u_R, u_E, u_K) = (1, 2, 2)$. Um zu zeigen, dass s^* ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, genügt es wegen des Ein-Schritt-Abweichungs-Lemmas, zu beweisen, dass für jeden Spieler $i \in \{R, E, K\}$ und jede Historie $k \in H \setminus Z$ mit $P(k) = i$ gilt:

$$u_{i|k}(O_k(s_{-i}^*|k, s_i^*|k)) \geq u_{i|k}(O_k(s_{-i}^*|k, s_i))$$

für jede Strategie s_i des Spielers i im Teilspiel $\Gamma(k)$, die sich von $s_i^*|k$ nur in der Aktion unterscheidet, die direkt nach der initialen Historie von $\Gamma(k)$ vorgeschrieben wird.

Für Ernesto und die Historien $\langle r, b \rangle$ und $\langle r, h \rangle$ sowie für Rosa und die Historien $\langle e, b \rangle$ und $\langle e, h \rangle$ ist das klar, da sich Ernesto bzw. Rosa durch Abweichen um jeweils einen bzw. zwei Nutzenpunkte verschlechtern würden. Nach der Historie $\langle r \rangle$ ist Rosa am Zug und würde sich bei festem $s_E^*|_{\langle r \rangle}$ (und $s_K^*|_{\langle r \rangle}$) um einen Nutzenpunkt von 2 auf 1 verschlechtern, wenn sie zu der Aktion h abweichen würde. Das entsprechende gilt für Ernesto in der Historie $\langle e \rangle$ bei einer Abweichung von h zu b bei festem $s_R^*|_{\langle e \rangle}$ (und $s_K^*|_{\langle e \rangle}$). Karl würde sich schließlich bei festen Strategien s_R^* und s_E^* in der

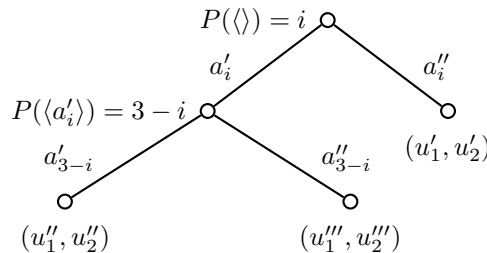
initialen Historie $\langle \rangle$ durch Abweichen von e auf r ebenfalls um einen Punkt von Nutzen 2 auf 1 verschlechtern.

Aufgabe 8.2 (Extensive Spiele, strategische Form, 4 Punkte)

Sei $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein strategisches Zwei-Spieler-Spiel, in dem beide Spieler je zwei Aktionen zur Verfügung haben, etwa $A_i = \{a'_i, a''_i\}$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass G genau dann die strategische Form eines extensiven Spiels mit perfekter Information ist, wenn es entweder ein $a_1 \in A_1$ gibt, so dass $u_i(a_1, a'_2) = u_i(a_1, a''_2)$ für $i = 1, 2$, oder wenn es ein $a_2 \in A_2$ gibt, so dass $u_i(a'_1, a_2) = u_i(a''_1, a_2)$ für $i = 1, 2$.

Lösung:

Angenommen, G ist die strategische Form eines extensiven Spiels mit perfekter Information. Damit $|A_1| = |A_2| = 2$ gilt, darf es in dem extensiven Spiel für beide Spieler $i = 1, 2$ nur jeweils eine nichtterminale Historie h mit $P(h) = i$ und $|A(h)| > 1$ geben, denn gäbe es für Spieler i zwei unterschiedliche nichtterminale Historien h' und h'' mit $P(h') = P(h'') = i$, $|A(h')| > 1$ und $|A(h'')| > 1$, so wäre $|A_i| = |\prod_{\{h \in H \setminus Z \mid P(h)=i\}} A(h)| \geq |A(h') \times A(h'')| = |A(h')| \cdot |A(h'')| \geq 2 \cdot 2 = 4 > 2 = |A_i|$, ein Widerspruch. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass $|A(h)| > 1$ für alle $h \in H \setminus Z$, denn sonst können die Historie h eliminiert und die nachfolgenden Historien im Spielbaum nach oben gezogen werden. Damit muss der Spielbaum bis auf Umordnung der Teilbäume die folgende Struktur haben (für $i = 1, 2$):



Falls $i = 1$: Dann gibt es ein $a_1 \in A_1$ (nämlich $a_1 = a'_1$), so dass $u_i(a_1, a'_2) = u'_i = u_i(a_1, a''_2)$ für $i = 1, 2$.

Falls $i = 2$: Dann gibt es ein $a_2 \in A_2$ (nämlich $a_2 = a''_2$), so dass $u_i(a'_1, a_2) = u'_i = u_i(a''_1, a_2)$ für $i = 1, 2$.

Damit ist eine Richtung der Äquivalenz gezeigt. Für die andere Richtung nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass es ein $a_1 \in A_1$ gibt, so dass $u_i(a_1, a'_2) = u_i(a_1, a''_2)$ für $i = 1, 2$. Sei ferner ohne Beschränkung der Allgemeinheit dieses $a_1 = a'_1$, d. h. $u_i(a'_1, a'_2) = u_i(a'_1, a''_2)$ für $i = 1, 2$. Dann ist aber G gerade die strategische Form des folgenden extensiven Spiels:

