Spieltheorie

Prof. Dr. B. Nebel, Dr. M. Helmert
Wintersemester 2007/2008

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 6 — Lösungen

Aufgabe 6.1 (Berechnung von Nash-Gleichgewichten (NSS), 4 Punkte)

In Aufgabe 4.1 haben Sie die Nash-Gleichgewichte des Spiels $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ mit $N = \{1, 2\}$, $A_1 = A_2 = \{z_1, z_2, z_3\}$ und der Nutzenfunktion u_1 ($u_2 = -u_1$) aus folgender Matrix von Hand bestimmt (dabei ist $v_1 > v_2 > v_3 > 0$):

	z_1	z_2	z_3
z_1	0	v_1	v_1
z_2	v_2	0	v_2
z_3	v_3	v_3	0

(a) Spezifizieren Sie die beiden Linearen Programme, deren Lösungen Nash-Gleichgewichtsstrategien in diesem Spiel entsprechen.

Lösung:

Sei α die gemischte Gleichgewichtsstrategie des Angreifers, β die des Verteidigers. Seien α_k, β_k, $k \in \{1, 2, 3\}$, die einzelnen Aktions-Wahrscheinlichkeiten, also $\alpha_k = \alpha(z_k)$, $\beta_k = \beta(z_k)$. Dann:

- Zur Berechnung von α löse das LP:

$$\text{Maximiere } u$$
$$\begin{aligned}
v_2 \cdot \alpha_2 + v_3 \cdot \alpha_3 &\geq u\\
v_1 \cdot \alpha_1 + v_3 \cdot \alpha_3 &\geq u\\
v_1 \cdot \alpha_1 + v_2 \cdot \alpha_2 &\geq u\\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 1\\
\alpha_1 &\geq 0\\
\alpha_2 &\geq 0\\
\alpha_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

- Zur Berechnung von β löse das LP:

$$\text{Minimiere } u$$
$$\begin{aligned}
v_1 \cdot \beta_2 + v_1 \cdot \beta_3 &\leq u\\
v_2 \cdot \beta_1 + v_2 \cdot \beta_3 &\leq u\\
v_3 \cdot \beta_1 + v_3 \cdot \beta_2 &\leq u\\
\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 1\\
\beta_1 &\geq 0\\
\beta_2 &\geq 0\\
\beta_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

(b) Verwenden Sie das Werkzeug `lp_solve`, um die Linearen Programme für $(v_1, v_2, v_3) = (12, 8, 4)$ und $(v_1, v_2, v_3) = (12, 8, 6)$ zu lösen. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Ergebnis von Aufgabe 4.1. Beachten Sie, dass `lp_solve` keine Variablen mit negativen Werten unterstützt. Geben Sie die Eingabe von `lp_solve`, dessen Ausgabe und Ihre Interpretation der Ausgabe (d. h. den Zusammenhang zu Nash-Gleichgewichten) an.

Lösung:

Für $(v_1, v_2, v_3) = (12, 8, 4)$ werden die beiden Linearen Programme nach Subtraktion von u auf beiden Seiten aller betreffenden Gleichungen in `lp_solve`-Syntax zu den folgenden Eingaben:

- Zur Berechnung von α:

```
max: u;
          8 * a2 + 4 * a3 - u >= 0;
12 * a1 +          4 * a3 - u >= 0;
12 * a1 + 8 * a2          - u >= 0;
     a1 +     a2 +     a3     = 1;
```

- Zur Berechnung von β:

```
min: u;
4 * b1 +  4 * b2            - u <= 0;
8 * b1 +            8 * b3 - u <= 0;
         12 * b2 + 12 * b3 - u <= 0;
    b1 +      b2 +      b3      = 1;
```

Die Bedingungen $\alpha_k \geq 0$ bzw. $\beta_k \geq 0$ für $k = 1, 2, 3$ müssen nicht kodiert werden, da sie in `lp_solve` implizit mitberücksichtigt werden.
Die Eingaben für $(v_1, v_2, v_3) = (12, 8, 6)$ sehen entsprechend aus.
Es folgen die Ausgaben von `lp_solve`:

- Für $(v_1, v_2, v_3) = (12, 8, 4)$:

Berechnung von α:

```
Value of obj. fun.: 4.8
u                   4.8
a1                  0.4
a2                  0.6
a3                  0
```

Berechnung von β:

```
Value of obj. fun.: 4.8
u                   4.8
b1                  0.6
b2                  0.4
b3                  0
```

Hier ist $v_1 v_2/(v_1 + v_2) \geq v_3$, d. h. nach Aufgabe 4.1 muss ein Nash-Gleichgewicht die folgende Form haben:

$$(\alpha, \beta) = \left(\left(\frac{v_2}{v_1 + v_2}, \frac{v_1}{v_1 + v_2}, 0 \right), \left(\frac{v_1}{v_1 + v_2}, \frac{v_2}{v_1 + v_2}, 0 \right) \right).$$

Einsetzen von $(v_1, v_2, v_3) = (12, 8, 4)$ ergibt:

$$(\alpha, \beta) = \left(\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right), \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0 \right) \right),$$

was genau der Ausgabe von `lp_solve` entspricht.

- Für $(v_1, v_2, v_3) = (12, 8, 6)$:

  Berechnung von α:

  ```
  Value of obj. fun.: 5.33333
  u                   5.33333
  a1                  0.222222
  a2                  0.333333
  a3                  0.444444
  ```

  Berechnung von β:

  ```
  Value of obj. fun.: 5.33333
  u                   5.33333
  b1                  0.555556
  b2                  0.333333
  b3                  0.111111
  ```

  Hier ist $v_1v_2/(v_1+v_2) \leq v_3$, d. h. nach Aufgabe 4.1 muss ein Nash-Gleichgewicht die folgende Form haben:

  $$(\alpha, \beta) = \left(\left(\frac{v_2v_3}{z}, \frac{v_1v_3}{z}, \frac{v_1v_2}{z}\right), \left(\frac{z-2v_2v_3}{z}, \frac{z-2v_1v_3}{z}, \frac{z-2v_1v_2}{z}\right)\right)$$

  mit $z = v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_1$. Hier ergibt Einsetzen von $(v_1, v_2, v_3) = (12, 8, 6)$:

  $$(\alpha, \beta) = \left(\left(\frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}\right), \left(\frac{5}{9}, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}\right)\right),$$

  also genau die Ausgabe von `lp_solve`.

Aufgabe 6.2 (Berechnung von Nash-Gleichgewichten (allgemein), 4 Punkte)

Erinnern Sie sich an das Spiel $G = \langle\{1,2\}, (A_i), (u_i)\rangle$ aus Aufgabe 5.2 mit $B = A_1 = A_2 = \{X, Y, Z\}$ und den folgenden Auszahlungen:

	X	Y	Z
X	$2,2$	$1,2$	$1,2$
Y	$2,1$	$0,0$	$3,3$
Z	$2,1$	$3,3$	$0,0$

(a) Formalisieren Sie das Spiel mithilfe der Reduktion aus der Vorlesung als LCP.

Lösung:

Das zugehörige LCP besteht aus den Variablen u, v, $\alpha(X)$, $\alpha(Y)$, $\alpha(Z)$, $\beta(X)$, $\beta(Y)$, $\beta(Z)$ und den folgenden linearen Constraints:

$$\begin{aligned}
u - 2\cdot\beta(X) - 1\cdot\beta(Y) - 1\cdot\beta(Z) &\geq 0 && (1)\\
u - 2\cdot\beta(X) - 0\cdot\beta(Y) - 3\cdot\beta(Z) &\geq 0 && (2)\\
u - 2\cdot\beta(X) - 3\cdot\beta(Y) - 0\cdot\beta(Z) &\geq 0 && (3)\\
v - 2\cdot\alpha(X) - 1\cdot\alpha(Y) - 1\cdot\alpha(Z) &\geq 0 && (4)\\
v - 2\cdot\alpha(X) - 0\cdot\alpha(Y) - 3\cdot\alpha(Z) &\geq 0 && (5)\\
v - 2\cdot\alpha(X) - 3\cdot\alpha(Y) - 0\cdot\alpha(Z) &\geq 0 && (6)\\
\alpha(X) &\geq 0 && (7)\\
\alpha(Y) &\geq 0 && (8)\\
\alpha(Z) &\geq 0 && (9)\\
\alpha(X) + \alpha(Y) + \alpha(Z) &= 1 && (10)\\
\beta(X) &\geq 0 && (11)\\
\beta(Y) &\geq 0 && (12)\\
\beta(Z) &\geq 0 && (13)\\
\beta(X) + \beta(Y) + \beta(Z) &= 1 && (14)
\end{aligned}$$

sowie den folgenden nicht-linearen Constraints:

$$\alpha(X) \cdot (u - 2 \cdot \beta(X) - 1 \cdot \beta(Y) - 1 \cdot \beta(Z)) = 0 \qquad (1_{supp})$$
$$\alpha(Y) \cdot (u - 2 \cdot \beta(X) - 0 \cdot \beta(Y) - 3 \cdot \beta(Z)) = 0 \qquad (2_{supp})$$
$$\alpha(Z) \cdot (u - 2 \cdot \beta(X) - 3 \cdot \beta(Y) - 0 \cdot \beta(Z)) = 0 \qquad (3_{supp})$$
$$\beta(X) \cdot (v - 2 \cdot \alpha(X) - 1 \cdot \alpha(Y) - 1 \cdot \alpha(Z)) = 0 \qquad (4_{supp})$$
$$\beta(Y) \cdot (v - 2 \cdot \alpha(X) - 0 \cdot \alpha(Y) - 3 \cdot \alpha(Z)) = 0 \qquad (5_{supp})$$
$$\beta(Z) \cdot (v - 2 \cdot \alpha(X) - 3 \cdot \alpha(Y) - 0 \cdot \alpha(Z)) = 0 \qquad (6_{supp})$$

(b) Geben Sie zwei (unterschiedliche) Lösungen für dieses LCP an und weisen Sie nach, dass es sich tatsächlich um Lösungen handelt.

Lösung:

Da Lösungen Nash-Gleichgewichten entsprechen, kann man einige Lösungen leicht „raten“:

- Offenbar ist (X, X) ein reines Nash-Gleichgewicht von G. Das entspricht der Lösung $\alpha(X) = \beta(X) = 1$, $\alpha(Y) = \alpha(Z) = \beta(Y) = \beta(Z) = 0$ und $u = v = 2$. Einsetzen in das LCP bestätigt, dass es sich um eine Lösung handelt.
- Das Strategieprofil $(\alpha, \beta) = ((0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ ist ein weiteres Nash-Gleichgewicht mit Nutzenprofil $(u, v) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Entsprechend sollte $\alpha(X) = \beta(X) = 0$, $\alpha(Y) = \alpha(Z) = \beta(Y) = \beta(Z) = \frac{1}{2}$ und $u = v = \frac{3}{2}$ eine weitere Lösung des LCPs sein. Auch das lässt sich durch Einsetzen in die Ungleichungen leicht bestätigen.
- Dem reinen Nash-Gleichgewicht (Y, Z) mit Nutzenprofil $(3, 3)$ entspricht die Lösung $\alpha(Y) = \beta(Z) = 1$, $\alpha(X) = \alpha(Z) = \beta(X) = \beta(Y) = 0$ und $u = v = 3$.
- Dem reinen Nash-Gleichgewicht (Z, Y) mit Nutzenprofil $(3, 3)$ entspricht die Lösung $\alpha(Z) = \beta(Y) = 1$, $\alpha(X) = \alpha(Y) = \beta(X) = \beta(Z) = 0$ und $u = v = 3$.