Spieltheorie

Prof. Dr. B. Nebel, Dr. M. Helmert
Wintersemester 2007/2008

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 5 — Lösungen

Aufgabe 5.1 (Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien, 4 Punkte)

Das verallgemeinerte Falke-oder-Taube-Spiel ist durch folgende Matrix gegeben:

		Spieler 2: Taube	Spieler 2: Falke
Spieler 1	Taube	c, c	b, d
	Falke	d, b	a, a

Dabei sind $a < b < c < d$ reelle Parameter.

Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in reinen und gemischten Strategien für den allgemeinen Fall und für den Standardfall $a = 0$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 4$.

Lösung:

Es gibt zwei Gleichgewichte in reinen Strategien, nämlich (Taube, Falke) und (Falke, Taube). Wegen $d > c$ und $b > a$ kann sich bei diesen Profilen keiner der beiden Spieler durch Abweichen verbessern. Die beiden anderen reinen Strategieprofile (Taube, Taube) und (Falke, Falke) sind keine Nash-Gleichgewichte, da sich in beiden Profilen beide Spieler durch Wechsel auf die andere Strategie verbessern würden (wiederum da $d > c$ und $b > a$).

Es kann kein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien geben, in dem einer der Spieler eine reine Strategie a und der andere Spieler eine echt gemischte Stategie α verfolgt: Dazu müssten alle Strategien in der Unterstützungsmenge von α, also sowohl Falke als auch Taube, beste Antworten auf a sein. Für beide Spieler und beide reinen Strategien a gibt es jedoch immer nur eine beste Antwort.

Damit verbleibt nur noch die Möglichkeit eines Nash-Gleichgewichts $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*)$, in dem sowohl α_1^* als auch α_2^* echt gemischt sind, also $0 < p = \alpha_1^*(\text{Taube}) < 1$ und $0 < q = \alpha_2^*(\text{Taube}) < 1$ gilt. Damit α^* ein Nash-Gleichgewicht ist, müssen für beide Spieler i beide reinen Strategien beste (und damit gleich gute) Antworten auf α_{-i}^* sein. Es ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} pc + (1-p)b &= pd + (1-p)a \\ qc + (1-q)b &= qd + (1-q)a \end{aligned}$$

Auflösen nach p und q ergibt die Lösung:

$$p = q = \frac{b-a}{b-a+d-c} \quad .$$

Der Nenner ist dabei von Null verschieden, da $b > a$ und $d > c$ gilt.

Als dritte und letzte Lösung ergibt sich also das symmetrische Nash-Gleichgewicht (α_1^*, α_2^*) mit $\alpha_1^* = \alpha_2^* = \{\text{Taube} \mapsto \frac{b-a}{b-a+d-c}, \text{Falke} \mapsto \frac{d-c}{b-a+d-c}\}$.

Setzt man die Standardwerte $a = 0$, $b = 1$, $c = 3$ und $d = 4$ ein, ergeben sich also die obigen zwei reinen Gleichgewichte sowie das echt gemischte Gleichgewichtsprofil (α_1^*, α_2^*) mit $\alpha_1^* = \alpha_2^* = \{\text{Taube} \mapsto \frac{1-0}{1-0+4-3} = \frac{1}{2}, \text{Falke} \mapsto \frac{4-3}{1-0+4-3} = \frac{1}{2}\}$.

Aufgabe 5.2 (Evolutionär stabile Strategien, 4 Punkte)

Betrachten Sie eine Population von Spielern, bei denen das Aufeinandertreffen zweier Individuen deren gemeinsames Arbeiten an einem Projekt darstellt. Zwei Individuen vom Typ X arbeiten gut zusammen, und sowohl Typ Y als auch Typ Z kann gut mit Typ X zusammenarbeiten, wenngleich X bei einer solchen Zusammenarbeit etwas schlechter abschneidet. Paarungen von zwei Typ-Y-Individuen oder zwei Typ-Z-Individuen sind eine Katastrophe, während Y-Individuen und Z-Individuen großartig miteinander harmonieren. Wir modellieren diese Situation durch das symmetrische Spiel $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ mit $B = A_1 = A_2 = \{X, Y, Z\}$ und den folgenden Auszahlungen:

	X	Y	Z
X	$2, 2$	$1, 2$	$1, 2$
Y	$2, 1$	$0, 0$	$3, 3$
Z	$2, 1$	$3, 3$	$0, 0$

(a) Bestimmen Sie alle evolutionär stabilen Strategien in G (nur reine Strategien und reine Mutanten).

Lösung:

Kandidaten für evolutionär stabile Strategien sind nur solche (reinen) Strategien, die in einem symmetrischen Nash-Gleichgewicht vorkommen. Das einzige symmetrische Nash-Gleichgewicht in G ist (X, X). Um zu zeigen, dass X evolutionär stabil ist, müssen wir noch zeigen, dass gegen alle besten Antworten ungleich X auf X die „Mutantenbedingung“ gilt, die besagt, dass der Mutant gegen einen anderen Mutanten einen geringeren Nutzen erzielen muss als X gegen einen Mutanten. Die Strategien Y und Z sind beste Antworten auf X. Jedoch gilt für $M \in \{Y, Z\}$, dass $u(X, M) = 1 > 0 = u(M, M)$, und damit ist X eine (die einzige) evolutionär stabile reine Strategie von G.

(b) Sind die evolutionär stabilen Strategien auch evolutionär stabil in der gemischten Erweiterung von G (also gegen gemischte Mutanten)? Wenn nicht, wie könnte dann ein erfolgreicher gemischter Mutant aussehen?

Lösung:

Die Strategie X ist in der gemischten Erweiterung von G *nicht* evolutionär stabil. Das Paar (X, X) ist zwar auch in der gemischten Erweiterung ein Nash-Gleichgewicht, aber wir können jetzt einen gemischten Mutanten finden, der gegenüber X einen evolutionären Vorteil hat, nämlich α mit

$\alpha(Y) = \alpha(Z) = 1/2$. Für diesen Mutanten gilt $U(\alpha, X) = 2 = U(X, X)$, d. h. α ist eine beste Antwort auf X. Außerdem gilt aber $U(\alpha, \alpha) = 3/2 > 1 = U(X, \alpha)$, womit X also nicht evolutionär stabil ist. Obwohl also eine Population von X-Spielern gegen Invasionen von Individuen sicher ist, die eine andere reine Strategie spielen, ist die gemischte Strategie α gegenüber X evolutionär im Vorteil. Der Grund dafür ist, dass Y-Typen gegen andere Y-Typen schlecht abschneiden, entsprechend Z-Typen gegen andere Z-Typen, aber ein Zusammentreffen eines Y-Typs und eines Z-Typs sehr produktiv ist. Wenn also Mutanten immer Y oder immer Z spielen, so schneiden sie gegen andere Mutanten schlecht ab, wenn aber alle Mutanten der gemischten Strategie α folgen (oder in einer alternativen Interpretation: wenn die Hälfte der Mutanten vom Typ Y und die andere Hälfte vom Typ Z ist), dann sind zwei Mutanten, die zusammenarbeiten müssen, mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ von unterschiedlichem Typ und damit sehr produktiv.

Wollte man den Mutanten M, mit dem gezeigt wird, dass X in der gemischten Erweiterung von G nicht evolutionär stabil ist, nicht nur erraten, sondern analytisch bestimmen (oder nachweisen, dass ein solcher Mutant nicht existiert), könnte man folgendermaßen vorgehen:

Sei $M(X) = x$, $M(Y) = y$ und $M(Z) = 1 - x - y$. Untersuche dann die Funktion $f(x, y) = U(X, M) - U(M, M)$ auf Extremstellen. Es ist $f(x, y) = x^2 + 6y^2 + 6xy - 2x - 6y + 1$. Damit bekommt man ein Polynom in zwei Variablen, und wir wollen Extremwerte im Bereich $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ untersuchen. Dazu bestimmen wir zunächst Extremwerte im Inneren der Fläche, indem wir partiell nach x und y ableiten und beide Ableitungen nullsetzen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 6y - 2.$$

Das ist gleich 0 gdw. $x + 3y - 1 = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 12y + 6x - 6.$$

Das ist gleich 0 gdw. $x + 2y - 1 = 0$. Damit beides gleich 0 ist, muss also $x + 3y - 1 = x + 2y - 1$ sein, woraus $y = 0$ folgt. Einsetzen in eine der Gleichungen gibt dann $x = 1$. Ein Kandidat ist also $x = 1$, $y = 0$; das ist aber uninteressant, denn es ist gerade unser Gleichgewichtskandidat X selbst.

Dann müssen wir die Ränder des Definitionsbereichs untersuchen. Dazu müssen wir die drei Begrenzungslinien untersuchen, also die Gerade $x = 0$, die Gerade $y = 0$ und die Gerade $x + y = 1$. Sei also

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= f(0, t) = 6t^2 - 6t + 1 \\
f_2(t) &= f(t, 0) = t^2 - 2t + 1 \\
f_3(t) &= f(t, 1 - t) = t^2 - 2t + 1
\end{aligned}$$

Diese drei Geraden muss man jetzt im Bereich t in $[0, 1]$ auf Extrema untersuchen. Dabei kommen jeweils die Randpunkte $t = 0$ und $t = 1$ in Frage sowie Maxima mit $0 < t < 1$. Zuerst die Randpunkte:

- $f_1(0) = 1,\ f_1(1) = 1$ größer als 0, also keine gefährlichen Mutanten.
- $f_2(0) = 1,\ f_2(1) = 0$ größer als 0 außer für $t = 1$, aber das ist genau wieder der Kandidat X, also auch keine gefährlichen Mutanten.
- $f_3 = f_2$, also auch hier keine gefährlichen Mutanten.

Bleibt also noch der Fall $0 < t < 1$. Leiten wir ab:

$$f_1'(t) = 12t - 6$$
$$f_2'(t) = f_3'(t) = 2t - 2$$

Für f_2 und f_3 bekommen wir als Maximumskandidaten $t = 1$, also X. Für f_1 gibt es aber einen weiteren interessanten Kandidaten, nämlich $t = \frac{1}{2}$. Das ist also genau der Fall, wo nie X gespielt wird und Y und Z dieselben Wahrscheinlichkeit haben. Das ist in der Tat der beste Mutant:

$$f_1(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}.$$

Das ist kleiner als 0, also haben wir einen Mutanten M gefunden, der eine beste Antwort auf X ist und gegen sich selbst besser abschneidet als X gegen M.