Spieltheorie

Prof. Dr. B. Nebel, Dr. M. Helmert
Wintersemester 2007/2008

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 4 — Lösungen

Aufgabe 4.1 (Gemischte Nash-Gleichgewichte, 4 Punkte)

Die Luftwaffe von Kriegspartei 1 hat genau ein Kampfflugzeug, mit dem sie eines von drei möglichen Zielen angreifen kann. Die gegnerische Partei 2 verfügt über genau eine Flugabwehrkanone, die sie einem der drei Ziele zuweisen kann. Der Wert von Ziel k ist v_k, wobei $v_1 > v_2 > v_3 > 0$. Ein Ziel k wird genau dann zerstört, wenn es angegriffen wird und unverteidigt ist. Partei 1 will den erwarteten Schaden maximieren, während Partei 2 ihn minimieren will. Formulieren Sie die Situation als strategisches Spiel und ermitteln Sie alle gemischten Nash-Gleichgewichte.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass es kein gemischtes Nash-Gleichgewicht geben kann, in dem ein Ziel mit strikt positiver Wahrscheinlichkeit angegriffen wird, ein höherwertiges Ziel aber mit Wahrscheinlichkeit 0. Argumentieren Sie für die verbleibenden Fälle damit, dass in gemischten Nash-Gleichgewichten jede Aktion aus der Unterstützungsmenge eines Spielers eine beste Antwort auf die gemischte Stategie des anderen Spielers ist.

Lösung:

Das Spiel hat die Form $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ mit $N = \{1, 2\}$, $A_1 = A_2 = \{z_1, z_2, z_3\}$. Da es ein Nullsummenspiel ist, reicht es, eine der Nutzenfunktionen, etwa u_1 für den Angreifer, anzugeben (dabei ist $v_1 > v_2 > v_3 > 0$):

		Partei 2 z_1	z_2	z_3
	z_1	0	v_1	v_1
Partei 1	z_2	v_2	0	v_2
	z_3	v_3	v_3	0

Sei (α^*, β^*) ein gemischtes Nash-Gleichgewicht von G und seien α^*_k, β^*_k, $k \in \{1, 2, 3\}$, die einzelnen Aktions-Wahrscheinlichkeiten, also $\alpha^*_k = \alpha^*(z_k)$, $\beta^*_k = \beta^*(z_k)$.

Zunächst wollen wir zeigen, dass es nicht möglich ist, dass ein Ziel z_k, $k \in \{1, 2\}$, mit Wahrscheinlichkeit $\alpha^*_k = 0$ angegriffen wird, Ziel z_ℓ, $\ell > k$, mit geringerem Wert aber mit positiver Wahrscheinlichkeit $\alpha^*_\ell > 0$. Angenommen, $\alpha^*_k = 0$. Dann muss auch $\beta^*_k = 0$ gelten, denn ein Ziel zu verteidigen, das nicht angegriffen wird, ist keine beste Antwort auf α^* (mit der Wahrscheinlichkeit, mit der man Ziel z_k verteidigt, kann man auch ein tatsächlich angegriffenes Ziel verteidigen und damit den erwarteten Schaden verringern). Ist aber $\beta^*_k = 0$, so ist ein Angriff auf Ziel z_ℓ keine beste Antwort auf β^*, da mit der Wahrscheinlichkeit, mit der z_ℓ angegriffen wird, auch das mit Sicherheit unverteidigte z_k angegriffen werden könnte, was den erwarteten Nutzen für den Angreifer erhöhen würde (Ziel z_k

wird sicher zerstört, und der erwartete Schaden ist höher als bei z_ℓ, selbst wenn auch z_ℓ mit Sicherheit unverteidigt wäre). Also muss gelten: $supp(\alpha^*) = \{z_1\}$ oder $supp(\alpha^*) = \{z_1, z_2\}$ oder $supp(\alpha^*) = \{z_1, z_2, z_3\}$. Analog folgt aus $\beta_k^* = 0$, $k \in \{1, 2\}$, dass auch $\beta_\ell^* = 0$ für $\ell > k$, denn ist $\beta_k^* = 0$, so ist ein Angriff auf z_ℓ, $\ell > k$, keine beste Antwort auf β^* mit dem gleichen Argument wie oben. Also ist in einem Nash-Gleichgewicht $\alpha_\ell^* = 0$. Da es aber nicht sinnvoll ist, ein Ziel zu verteidigen, das nicht angegriffen wird, ist auch $\beta_\ell^* = 0$. Betrachten wir die drei Fälle von $supp(\alpha^*)$ getrennt:

Falls $supp(\alpha^*) = \{z_1\}$: Dann ist $\alpha_1^* = 1$ und $\alpha_2^* = \alpha_3^* = 0$, d.h. Ziel z_1 wird mit Wahrscheinlichkeit 1 angegriffen. Damit kann aber (α^*, β^*) für kein $\beta^* \in \Delta(A_2)$ ein Nash-Gleichgewicht sein, denn die einzige beste Antwort von Partei 2 auf α^* ist β^* mit $\beta_1^* = 1$ und $\beta_2^* = \beta_3^* = 0$, d. h. mit Wahrscheinlichkeit 1 Ziel z_1 zu verteidigen. Darauf ist jedoch α^* keine beste Antwort, da es für den Angreifer dann beispielsweise besser ist, immer Ziel z_2 anzugreifen.

Falls $supp(\alpha^*) = \{z_1, z_2\}$: Werden nur die Ziele z_1 und z_2 mit positiver Wahrscheinlichkeit angegriffen, so kann nach derselben Argumentation wie oben die Verteidigung von z_3 keine beste Antwort auf α^* sein, d. h. $supp(\beta^*) \subseteq \{z_1, z_2\}$. Also ist $\beta_3^* = 0$. Da sich Wahrscheinlichkeiten zu 1 summieren müssen, ist $\beta_2^* = 1 - \beta_1^*$. Tatsächlich ist $supp(\beta^*) = \{z_1, z_2\}$. Denn wäre $supp(\beta^*) = \{z_1\}$, so wäre α^* keine beste Antwort auf β^*, weil sich der Angreifer durch die reine Strategie z_2 gegenüber α^* verbessern könnte.

Da die beiden Aktionen von Partei 1, z_1 oder z_2 anzugreifen, beste Antworten auf β^*, insbesondere also gleich gute Antworten auf β^* sind, muss gelten:

$$U_1(z_1, \beta^*) = U_1(z_2, \beta^*).$$

Dies gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} &\beta_1^* u_1(z_1, z_1) + \beta_2^* u_1(z_1, z_2) + \beta_3^* u_1(z_1, z_3) = \\ &\beta_1^* u_1(z_2, z_1) + \beta_2^* u_1(z_2, z_2) + \beta_3^* u_1(z_2, z_3). \end{aligned}$$

Setzt man die Werte von u_1 und $\beta_3^* = 0$ ein, erhält man

$$\beta_2^* v_1 = \beta_1^* v_2.$$

Zusammen mit $\beta_2^* = 1 - \beta_1^*$ folgt $(1 - \beta_1^*) v_1 = \beta_1^* v_2$ gdw. $v_1 = \beta_1^*(v_1 + v_2)$ gdw. $\beta_1^* = \frac{v_1}{v_1+v_2}$. Damit muss $\beta_2^* = \frac{v_2}{v_1+v_2}$ gelten, insgesamt also

$$\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*) = \left(\frac{v_1}{v_1 + v_2}, \frac{v_2}{v_1 + v_2}, 0 \right).$$

Wegen $supp(\beta^*) = \{z_1, z_2\}$ verläuft der Beweis, dass unter der Voraussetzung $supp(\alpha^*) = \{z_1, z_2\}$ die Gleichung

$$\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) = \left(\frac{v_2}{v_1 + v_2}, \frac{v_1}{v_1 + v_2}, 0 \right)$$

gelten muss, völlig analog.

Das Nutzenprofil in (α^*, β^*) ist

$$(U_1(\alpha^*, \beta^*), U_2(\alpha^*, \beta^*)) = \left(\frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}, -\frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}\right).$$

Dass β^* eine beste Antwort auf α^* ist, haben wir gezeigt. Dass aber auch α^* eine beste Antwort auf β^* ist, gilt nur, wenn tatsächlich Aktion z_3, also ein Angriff auf Ziel 3, keine bessere Antwort von Partei 1 auf β^* ist. Dazu muss

$$U_1(\alpha^*, \beta^*) \geq U_1(z_3, \beta^*)$$

gelten. Wegen $U_1(z_3, \beta^*) = \beta_1^* u_1(z_3, z_1) + \beta_2^* u_1(z_3, z_2) = v_3(\beta_1^* + \beta_2^*) = v_3$ gilt das genau dann, wenn $v_1 v_2/(v_1 + v_2) \geq v_3$.

Kurz: Falls $v_1 v_2/(v_1 + v_2) \geq v_3$, so haben wir ein Nash-Gleichgewicht

$$(\alpha^*, \beta^*) = \left(\left(\frac{v_2}{v_1 + v_2}, \frac{v_1}{v_1 + v_2}, 0\right), \left(\frac{v_1}{v_1 + v_2}, \frac{v_2}{v_1 + v_2}, 0\right)\right).$$

Falls $supp(\alpha^*) = \{z_1, z_2, z_3\}$: Hier gibt es nur drei Fälle, wie $supp(\beta^*)$ aussehen kann, weil $\beta_k^* = 0$, $k \in \{1, 2\}$, impliziert, dass auch $\beta_\ell^* = 0$ für $\ell > k$.

Falls $supp(\beta^*) = \{z_1\}$: In diesem Fall ist es keine beste Antwort des Angreifers, Ziel z_1 anzugreifen, d. h. $z_1 \notin supp(\alpha^*)$, im Widerspruch zur Annahme. Also kann kein Nash-Gleichgewicht vorliegen.

Falls $supp(\beta^*) = \{z_1, z_2\}$: Wegen der Beste-Antwort-Bedingung haben wir $U_1(z_1, \beta^*) = U_1(z_2, \beta^*) = U_1(z_3, \beta^*)$ bzw. nach Einsetzen von $\beta_3^* = 0$, $\beta_2^* = 1 - \beta_1^*$ und der Nutzenwerte v_i: $(1 - \beta_1^*)v_1 = \beta_1^* v_2 = v_3$. Daraus folgt

$$(\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*) = \left(\frac{v_1}{v_1 + v_2}, \frac{v_2}{v_1 + v_2}, 0\right)$$

und $v_3 = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}$. Aus der Sicht von Spieler 2 muss gelten, dass $U_2(\alpha^*, z_1) = U_2(\alpha^*, z_2) \geq U_2(\alpha^*, z_3)$, da z_1 und z_2 gleich gute beste Antworten auf α^* sind und z_3 eine höchstens so gute Antwort ist. Setzt man die v_i ein und vereinfacht, so erhält man, zusammen mit $\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^* = 1$ und der oben gewonnenen Beziehung zwischen den Werten v_i

$$\begin{aligned} \alpha_2^* v_2 &= \alpha_1^* v_1 \\ \alpha_3^* v_3 &\leq \alpha_1^* v_1 \\ \alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^* &= 1 \\ v_3 &= v_1 v_2/(v_1 + v_2). \end{aligned}$$

Löst man diese (Un-)Gleichungen auf, so erhält man $\alpha_3^* \leq \frac{1}{2}$. Außerdem erhält man $\alpha_1^*/\alpha_2^* = v_2/v_1$. Daraus folgt

$$(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) = \left(\frac{v_2}{v_1 + v_2}(1 - w), \frac{v_1}{v_1 + v_2}(1 - w), w\right)$$

mit $0 < w \leq 1/2$.

Falls $supp(\beta^*) = \{z_1, z_2, z_3\}$: Wegen $supp(\beta^*) = \{z_1, z_2, z_3\}$ müssen alle drei Ziele beste und damit gleich gute Antworten auf α^* sein, d. h. $U_2(\alpha^*, z_1) = U_2(\alpha^*, z_2) = U_2(\alpha^*, z_3)$. Es sind

$$\begin{aligned} U_2(\alpha^*, z_1) &= -v_2\alpha_2^* - v_3\alpha_3^* \\ U_2(\alpha^*, z_2) &= -v_1\alpha_1^* - v_3\alpha_3^* \\ U_2(\alpha^*, z_3) &= -v_1\alpha_1^* - v_2\alpha_2^*. \end{aligned}$$

Paarweises Gleichsetzen liefert zwei linear unabhängige Gleichungen. Zusammen mit der Bedingung, dass sich die α_i^* zu 1 aufsummieren müssen, erhalten wir also:

$$\begin{aligned} v_1\alpha_1^* &= v_2\alpha_2^* \\ v_1\alpha_1^* &= v_3\alpha_3^* \\ \alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^* &= 1. \end{aligned}$$

Auflösen der dritten Gleichung nach α_3^* ergibt

$$\alpha_3^* = 1 - \alpha_1^* - \alpha_2^*$$

und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert insgesamt

$$\begin{aligned} v_1\alpha_1^* &= v_2\alpha_2^* \\ v_1\alpha_1^* &= v_3(1 - \alpha_1^* - \alpha_2^*) = v_3 - v_3\alpha_1^* - v_3\alpha_2^*. \end{aligned}$$

Löst man die obere Gleichung nach α_2^* auf, so erhält man

$$\alpha_2^* = \frac{v_1}{v_2}\alpha_1^*.$$

Setzt man dies in die untere Gleichung ein, so bleibt

$$v_1\alpha_1^* = v_3 - v_3\alpha_1^* - v_3\frac{v_1}{v_2}\alpha_1^*$$

bzw.

$$\begin{aligned} v_3 &= v_1\alpha_1^* + v_3\alpha_1^* + \frac{v_1v_3}{v_2}\alpha_1^* \\ &= \frac{v_1v_2}{v_2}\alpha_1^* + \frac{v_2v_3}{v_2}\alpha_1^* + \frac{v_1v_3}{v_2}\alpha_1^* \\ &= \frac{v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_1}{v_2}\alpha_1^* \end{aligned}$$

Damit ist

$$\alpha_1^* = \frac{v_2v_3}{v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_1}$$

Setzen wir dieses Ergebnis wieder für α_2^* bzw. danach für α_3^* ein, und verwenden wir dabei die Abkürzung $z := v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_1$, so erhalten wir insgesamt:

$$(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) = (\frac{v_2v_3}{z}, \frac{v_1v_3}{z}, \frac{v_1v_2}{z}).$$

Um β^* zu bestimmen, müssen wir ausnutzen, dass

$$\begin{aligned} U_1(z_1, \beta^*) &= v_1(\beta_2^* + \beta_3^*) \\ U_1(z_2, \beta^*) &= v_2(\beta_1^* + \beta_3^*) \\ U_1(z_3, \beta^*) &= v_3(\beta_1^* + \beta_2^*) \end{aligned}$$

alle denselben Wert haben müssen, da alle Antworten beste und damit gleich gute Antworten auf β^* sind. Paarweises Gleichsetzen liefert wieder zwei linear unabhängige Gleichungen. Zusammen mit der Bedingung, dass sich die β_i^* zu 1 aufsummieren müssen, erhalten wir also:

$$\begin{aligned} v_1\beta_2^* + v_1\beta_3^* &= v_2\beta_1^* + v_2\beta_3^* \\ v_1\beta_2^* + v_1\beta_3^* &= v_3\beta_1^* + v_3\beta_2^* \\ \beta_1^* + \beta_2^* + \beta_3^* &= 1. \end{aligned}$$

Auflösen der dritten Gleichung nach β_3^* ergibt

$$\beta_3^* = 1 - \beta_1^* - \beta_2^*$$

und Einsetzen in die anderen beiden Gleichungen liefert insgesamt

$$\begin{aligned} v_1\beta_2^* - v_2\beta_1^* + (v_1 - v_2)(1 - \beta_1^* - \beta_2^*) &= 0 \\ (v_1 - v_3)\beta_2^* - v_3\beta_1^* + v_1(1 - \beta_1^* - \beta_2^*) &= 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man die Klammern aus und fasst zusammen, bleibt

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 - v_1\beta_1^* + v_2\beta_2^* &= 0 \\ -v_3\beta_2^* - v_3\beta_1^* - v_1\beta_1^* + v_1 &= 0. \end{aligned}$$

Auflösen der unteren Gleichung nach β_2^* liefert

$$\beta_2^* = \frac{v_1}{v_3} - \frac{v_1 + v_3}{v_3}\beta_1^*.$$

Setzt man dies in die obere Gleichung ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 - v_1\beta_1^* + v_2\left(\frac{v_1}{v_3} - \frac{v_1 + v_3}{v_3}\beta_1^*\right) &= \\ v_1 - v_2 - v_1\beta_1^* + \frac{v_1 v_2}{v_3} - \frac{v_1 v_2 + v_2 v_3}{v_3}\beta_1^* &= \\ \frac{v_1 v_3 - v_2 v_3 + v_1 v_2}{v_3} - \frac{v_1 v_3 + v_2 v_3 + v_1 v_2}{v_3}\beta_1^* &= 0. \end{aligned}$$

Löst man das nach β_1^* auf, so erhält man

$$\beta_1^* = \frac{v_1 v_2 - v_2 v_3 + v_3 v_1}{v_1 v_3 + v_2 v_3 + v_1 v_2} = \frac{v_1 v_2 - v_2 v_3 + v_3 v_1}{z}$$

mit z wie oben. Setzt man nun wieder in β_2^* und β_3^* ein, so erhält man als Endergebnis

$$(\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*) = \left(\frac{z - 2v_2 v_3}{z}, \frac{z - 2v_1 v_3}{z}, \frac{z - 2v_1 v_2}{z}\right).$$

Weil aus $z_3 \in \mathit{supp}(\beta^*)$ (oder äquivalent $\beta_3^* \geq 0$) folgt, dass auch $z_1, z_2 \in \mathit{supp}(\beta^*)$ (oder äquivalent $\beta_1^*, \beta_2^* \geq 0$) gilt, reicht es, sich zu versichern, dass $\beta_3^* \geq 0$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $z - 2v_1v_2 = -v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_1 \geq 0$ gdw. $v_3 \geq \frac{v_1v_2}{v_1+v_2}$. Andernfalls liegt kein Nash-Gleichgewicht vor.

Zusammenfassend: Die Nash-Gleichgewichte von G sind genau die gemischten Strategieprofile

$$(\alpha^*, \beta^*) = \left(\left(\frac{v_2}{v_1+v_2}, \frac{v_1}{v_1+v_2}, 0 \right), \left(\frac{v_1}{v_1+v_2}, \frac{v_2}{v_1+v_2}, 0 \right) \right),$$

falls $v_1v_2/(v_1+v_2) \geq v_3$,

$$(\alpha^*, \beta^*) = \left(\left(\frac{v_2}{v_1+v_2}(1-w), \frac{v_1}{v_1+v_2}(1-w), w \right), \left(\frac{v_1}{v_1+v_2}, \frac{v_2}{v_1+v_2}, 0 \right) \right)$$

für beliebige $0 < w \leq 1/2$, falls $v_1v_2/(v_1+v_2) = v_3$, und

$$(\alpha^*, \beta^*) = \left(\left(\frac{v_2v_3}{z}, \frac{v_1v_3}{z}, \frac{v_1v_2}{z} \right), \left(\frac{z-2v_2v_3}{z}, \frac{z-2v_1v_3}{z}, \frac{z-2v_1v_2}{z} \right) \right)$$

mit $z = v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_1$, falls $v_3 \geq v_1v_2/(v_1+v_2)$.

Aufgabe 4.2 (Satz von Nash, Verallgemeinerung, 4 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Kakutani, analog zum Beweis des Satzes von Nash: Ist $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ ein strategisches Spiel, so dass für jedes $i \in N$ gilt:

(a) $A_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ ist nicht-leer, konvex und kompakt und
(b) u_i ist stetig in A und quasi-konkav in A_i.

Dann besitzt G ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Quasi-Konkavität von u_i die Konvexität der Mengen der besten Antworten impliziert.

Lösung:

Sei $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ ein strategisches Spiel mit den Eigenschaften aus der Aufgabenstellung. Sei $A := \prod_{i \in N} A_i \subseteq \mathbb{R}^M$ mit $M = \sum_{i \in N} n_i$ und sei $B : A \to 2^A$ die Beste-Antwort-Funktion, d. h. $B(a) = \prod_{i \in N} B_i(a_{-i})$ für alle $a \in A$. Dann ist ein Strategieprofil $a \in A$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht von G, wenn $a \in B(a)$ ein Fixpunkt von B ist. Um zu zeigen, dass G ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien besitzt, reicht es also zu zeigen, dass B einen Fixpunkt aufweist. Um das zu zeigen, verwenden wir wie in der Vorlesung den Fixpunktsatz von Kakutani. Damit dieser anwendbar ist, müssen A und B die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

(a) $A \neq \emptyset$
(b) A kompakt
(c) A konvex
(d) B ober-hemi-stetig

(e) $B(a) \neq \emptyset$ für alle $a \in A$

(f) $B(a)$ konvex für alle $a \in A$

Wir wollen nun der Reihe nach zeigen, dass alle diese Voraussetzungen tatsächlich erfüllt sind. Dazu benötigen wir noch ein wenig Notation: Sei $I(i) \subseteq \{0, \ldots, M-1\}$ die Menge aller Indizes in einem Strategieprofil a, die die Strategie von Spieler $i \in N$ beschreiben (also $|I(i)| = n_i$ für alle $i \in N$). Ist $N = \{1, \ldots, |N|\}$, so ist $I(i) = \{\sum_{j=0}^{i-1} n_j, \ldots, \sum_{j=0}^{i} n_j - 1\}$. Ist a ein Strategieprofil und $i \in N$ ein Spieler, so sei $a_i := (a_k)_{k \in I(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}$ die Projektion von a auf die Strategie von Spieler $i \in N$. Umgekehrt ist dann $a = (a_i)_{i \in N}$.

Zu (a) $A \neq \emptyset$: Da nach Voraussetzung $A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in N$, existieren Aktionen $a_i \in A_i$ für alle $i \in N$. Damit ist $(a_i)_{i \in N} \in A$, also $A \neq \emptyset$.

Zu (b) A kompakt: Dazu müssen wir zeigen, dass A abgeschlossen und beschränkt ist.

(a) A abgeschlossen: Wir müssen zeigen, dass der Grenzwert jeder konvergenten Folge in A selbst in A liegt und dürfen die entsprechende Behauptung für alle A_i voraussetzen. Sei also $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in A mit Grenzwert $\lim_{n \to \infty} a^n = a$. Für $i \in N$ seien a_i^n und a_i die entsprechenden Abschnitte von a^n bzw. a. Offensichtlich konvergiert für alle $i \in N$ die Folge $(a_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $\lim_{n \to \infty} a_i^n = a_i$. Da alle A_i abgeschlossen sind, ist $a_i \in A_i$ für alle $i \in N$ und damit $a = (a_i)_{i \in N} \in A$.

(b) A beschränkt: Nach Voraussetzung sind alle A_i beschränkt, d. h. für alle $i \in N$ gibt es ein $C_i \in \mathbb{R}$ so dass für alle $a_i \in A_i$ und alle $k = 0, \ldots, n_i - 1$ gilt: $|a_{ik}| \leq C_i$. Sei $C = \max_{i \in N} C_i$. Dann ist jedes $a \in A$ in allen Komponenten durch C beschränkt, d. h. für alle $a \in A$ und alle $k' = 0, \ldots, M-1$ gilt $|a_{k'}| \leq C$, da jedes solche $a_{k'}$ gleich einem a_{ik} für ein $i \in N$ und $k = 0, \ldots, n_i - 1$ ist und damit $|a_{k'}| = |a_{ik}| \leq C_i \leq \max_{i \in N} C_i = C$ gelten muss.

Zu (c) A konvex: Wir müssen zeigen, dass für alle $a, b \in A$ auch jede konvexe Kombination $\lambda a + (1 - \lambda) b$ in A liegt, wenn $\lambda \in [0, 1]$. Mit der komponentenweisen Notation von oben gilt $\lambda a + (1 - \lambda b) = \lambda (a_i)_{i \in N} + (1 - \lambda)(b_i)_{i \in N} = (\lambda a_i)_{i \in N} + ((1 - \lambda) b_i)_{i \in N} = (\lambda a_i + (1 - \lambda) b_i)_{i \in N}$. Da nach Voraussetzung jedes A_i konvex ist, ist auch $\lambda a_i + (1 - \lambda) b_i \in A_i$ für alle $i \in N$. Damit ist $\lambda a + (1 - \lambda b) = (\lambda a_i + (1 - \lambda) b_i)_{i \in N} \in A$.

Zu (d) B ober-hemi-stetig: Es ist zu zeigen, dass $\mathrm{Graph}(B)$ abgeschlossen ist. Sei $(a^n, b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathrm{Graph}(B)$ mit $\lim_{n \to \infty} (a^n, b^n) = (a, b)$; $a^n, b^n, a, b \in A$, $b^n \in B(a^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist zu zeigen, dass $(a, b) \in \mathrm{Graph}(B)$, d. h. dass $b \in B(a)$ eine beste Antwort auf a ist. Wir zeigen dies komponentenweise für jeden Spieler $i \in N$. Sei $b_i' \in A_i$ beliebig. Dann gilt $u_i(b_i, a_{-i}) = u_i(\lim_{n \to \infty} (b_i^n, a_{-i}^n)) = \lim_{n \to \infty} u_i(b_i^n, a_{-i}^n) \geq \lim_{n \to \infty} u_i(b_i', a_{-i}^n) = u_i(\lim_{n \to \infty} (b_i', a_{-i}^n)) = u_i(b_i', \lim_{n \to \infty} a_{-i}^n) = u_i(b_i', a_{-i})$. Die beiden Gleichungen, in denen Grenzwertbildung und Anwendung von u_i vertauscht werden, gelten wegen der Stetigkeit von u_i, die Ungleichung, weil $b_i^n \in B_i(a_{-i}^n)$, und die restlichen Gleichungen nach Definition bzw.

weil b_i' nicht von n abhängt. Insgesamt ist also $u_i(b_i, a_{-i}) \geq u_i(b_i', a_{-i})$ für alle $b_i' \in A_i$, d. h. $b_i \in B_i(a_{-i})$ für alle $i \in N$ und damit $b \in B(a)$ bzw. $(a, b) \in \text{Graph}(B)$.

Zu (e) $B(a) \neq \emptyset$ für alle $a \in A$: Analog zu oben reicht es zu zeigen, dass $B_i(a_{-i}) \neq \emptyset$ für alle $i \in N$, weil dann auch das Produkt dieser Mengen nicht leer sein kann. $B_i(a_{-i})$ ist genau dann nicht-leer, wenn B_i für jedes feste a_{-i} auf A_i ein Maximum annimmt, d. h. wenn es für alle $a_{-i} \in A_{-i}$ ein a_i gibt, so dass für alle a_i' gilt: $u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i', a_{-i})$. Nach Voraussetzung ist u_i stetig in A, und damit ist auch $u_i(\cdot, a_{-i})$ für jedes feste a_{-i} stetig in A_i. Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen ein Maximum annehmen, muss also eine beste Antwort a_i existieren, d. h. $B_i(a_{-i}) \neq \emptyset$.

Zu (f) $B(a)$ konvex für alle $a \in A$: Es reicht zu zeigen, dass $B_i(a_{-i})$ für alle $i \in N$ und $a_{-i} \in A_{-i}$ konvex ist. Daraus folgt die Konvexität von $B(a)$ für alle $a \in A$ analog zum Beweis der Konvexität von A (s.o.). Wir wissen, dass $B_i(a_{-i}) \neq \emptyset$ für alle $i \in N$. Sei etwa $a_i \in B_i(a_{-i})$ und $u := u_i(a_i, a_{-i})$ der Wert einer besten Antwort für Spieler $i \in N$ auf a_{-i}. Dann lässt sich die Menge der besten Antworten auf a_{-i} auch alternativ beschreiben: $B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i \mid u_i(a_i, a_{-i}) \geq u\}$. Nach Voraussetzung ist jedes u_i quasi-konkav in A_i, d. h. nach Definition der Quasi-Konkavität ist für jedes $z \in \mathbb{R}$ die Menge $\{a_i \in A_i \mid u_i(a_i, a_{-i}) \geq z\}$ konvex für alle a_{-i}. Für $z := u$ ist das genau die Menge der besten Antworten $B_i(a_{-i})$ auf a_{-i}.

Damit ist gezeigt, dass die Menge der Aktionsprofile A und die Beste-Antwort-Funktion B die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Kakutani erfüllen. Also existiert ein Fixpunkt von B, d. h. ein Nash-Gleichgewicht von G.