

## Spieltheorie

Prof. Dr. B. Nebel, Dr. M. Helmert  
Wintersemester 2007/2008

Universität Freiburg  
Institut für Informatik

### Übungsblatt 3 — Lösungen

#### Aufgabe 3.1 (Minimax-Strategieprofile)

Sei  $G$  ein Nullsummenspiel, in dem ein Nash-Gleichgewicht existiert. Zeigen Sie mit Hilfe des zweiten Teils des Satzes über den Zusammenhang zwischen Nash-Gleichgewichten und Minimax-Strategieprofilen in Nullsummenspielen:

- (a) Werden einige der Nutzenwerte von Spieler 1 so erhöht, dass das resultierende Spiel  $G'$  wieder ein Nullsummenspiel ist, dann besitzt  $G'$  kein Nash-Gleichgewicht, in dem Spieler 1 einen geringeren Nutzen erhält als in den Nash-Gleichgewichten von  $G$ .

**Lösung:**

Sei  $N = \{1, 2\}$ ,  $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$  und  $G' = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u'_i)_{i \in N} \rangle$ . Nach Voraussetzung sind  $G$  und  $G'$  Nullsummenspiele und  $u'_1(x, y) \geq u_1(x, y)$  für alle  $x \in A_1$  und  $y \in A_2$ . Falls es in  $G'$  kein Nash-Gleichgewicht gibt, ist nichts weiter zu zeigen. Nehmen wir also an,  $(x', y')$  ist ein Nash-Gleichgewicht in  $G'$ . Ferner sei  $(x^*, y^*)$  ein Nash-Gleichgewicht in  $G$  (das nach Voraussetzung existiert). Dann gilt nach dem Satz über den Zusammenhang zwischen Nash-Gleichgewichten und Minimax-Strategieprofilen in Nullsummenspielen  $u'_1(x', y') = \max_{x \in A_1} \min_{y \in A_2} u'_1(x, y) \geq \max_{x \in A_1} \min_{y \in A_2} u_1(x, y) = u_1(x^*, y^*)$ , d. h. in jedem Nash-Gleichgewicht  $(x', y')$  von  $G'$  erhält Spieler 1 mindestens den gleichen Nutzen wie in den Nash-Gleichgewichten von  $G$ . Diese Eigenschaft gilt nicht notwendigerweise in Nicht-Nullsummenspielen (vgl. Aufgabe 2.4).

- (b) Entsteht das Spiel  $G'$  aus  $G$  durch Streichung einer Aktion von Spieler 1, dann besitzt  $G'$  kein Nash-Gleichgewicht, in dem der Nutzen von Spieler 1 höher ist als in den Nash-Gleichgewichten von  $G$ .

**Lösung:**

Sei  $N = \{1, 2\}$ ,  $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$  und  $G' = \langle N, (A'_i)_{i \in N}, (u'_i)_{i \in N} \rangle$ . Für Spieler 1 ist  $A'_1 = A_1 \setminus \{a_1\}$  für ein  $a_1 \in A_1$  und für Spieler 2 ist  $A'_2 = A_2$ . Die Nutzenfunktionen  $u'_1$  und  $u'_2$  sind die Restriktionen von  $u_1$  bzw.  $u_2$  auf  $A'_1 \times A'_2$ . Sei wieder  $(x^*, y^*)$  ein Nash-Gleichgewicht von  $G$ , das nach Voraussetzung existiert, und  $(x', y')$  eines von  $G'$ , dessen Existenz wir annehmen, weil sonst nichts mehr zu zeigen bleibt. Da  $G$  und  $G'$  Nullsummenspiele sind, gilt  $u'_1(x', y') = u_1(x', y') = \max_{x \in A'_1} \min_{y \in A'_2} u_1(x, y) = \max_{x \in A'_1} \min_{y \in A_2} u_1(x, y) \leq \max_{x \in A_1} \min_{y \in A_2} u_1(x, y) = u_1(x^*, y^*)$ , d. h. der Nutzen von Spieler 1 ist in jedem Nash-Gleichgewicht von  $G'$  höchstens so groß wie in den Nash-Gleichgewichten von  $G$ . Auch diese Eigenschaft gilt, wie in Aufgabe 2.4 gezeigt, in Nicht-Nullsummenspielen im Allgemeinen nicht.

#### Aufgabe 3.2 (Dominanzlösbarkeit)

Ein strategisches Spiel heißt *dominanzlösbar*, wenn alle Spieler zwischen allen Strategieprofilen indifferent sind, die das iterative Verfahren überstehen, bei dem in jedem Schritt *alle* schwach dominierten Strategien *aller* Spieler simultan eliminiert werden. Geben Sie ein Beispiel für ein Spiel an, das *dominanzlösbar* ist, aber für das nicht alle Spieler zwischen allen Strategieprofilen indifferent sind, die (bei geeigneter Eliminationsreihenfolge) die iterierte Elimination schwach dominierter Strategien überstehen.

**Lösung:**

Sei  $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$  mit  $N = \{1, 2\}$ ,  $A_1 = \{T, B\}$ ,  $A_2 = \{L, R\}$  und der folgenden Auszahlungsmatrix:

		Spieler 2	
		<i>L</i>	<i>R</i>
Spieler 1	<i>T</i>	1, 0	0, 0
	<i>B</i>	0, 1	0, 0

$G$  ist dominanzlösbar, denn  $B$  wird von  $T$  und  $R$  von  $L$  schwach dominiert und die simultane Eliminierung von  $B$  und  $R$  führt zu dem Spiel, in dem nur noch das Aktionsprofil  $(T, L)$  übrig ist.

Da nur dieses eine Strategieprofil das iterierte Verfahren der simultanen Elimination aller schwach dominierten Strategien übersteht, sind trivialerweise alle Spieler zwischen allen verbleibenden Strategieprofilen indifferent. Also ist  $G$  dominanzlösbar.

Andererseits führt die iterierte Elimination schwach dominierter Strategien nicht zu einer eindeutigen Lösung, da in dem Fall, dass zuerst nur  $B$  eliminiert wird, keine weitere Elimination mehr möglich ist und das Spiel mit den beiden Aktionsprofilen  $(T, L)$  und  $(T, R)$  übrigbleibt, zwischen denen Spieler 1 nicht indifferent ist, da  $u_1(T, L) = 1 > 0 = u_1(T, R)$ .

**Aufgabe 3.3** (Nash-Gleichgewichte in Nullsummenspielen)

Beweisen Sie die folgende Behauptung oder geben Sie ein Gegenbeispiel an: Ist  $G$  ein Nullsummenspiel, in dem ein Nash-Gleichgewicht existiert, und ist  $v$  die Nash-Gleichgewichts-Auszahlung von Spieler 1 in  $G$ , dann ist in  $G$  jedes Strategieprofil, das Spieler 1 die Auszahlung  $v$  bringt, ein Nash-Gleichgewicht.

**Lösung:**

Die Behauptung gilt nicht. Dazu reicht es, ein Nullsummenspiel  $G$  anzugeben, so dass  $(x^*, y^*)$  ein Nash-Gleichgewicht in  $G$  ist, dass  $u_1(x^*, y^*) = v$ , und dass es ein Strategieprofil  $(x, y)$  in  $G$  gibt, das kein Nash-Gleichgewicht ist, für das aber auch  $u_1(x, y) = v$  gilt. Ein solches Spiel ist zum Beispiel das folgende:

		Spieler 2	
		<i>L</i>	<i>R</i>
Spieler 1	<i>T</i>	0, 0	1, -1
	<i>B</i>	-1, 1	0, 0

Dabei ist  $(T, L)$  das einzige Nash-Gleichgewicht, denn in  $(T, R)$  kann Spieler 2 profitabel abweichen, in  $(B, L)$  Spieler 1 und in  $(B, R)$  beide Spieler. Also ist  $v = u_1(T, L) = 0$ . Zugleich ist aber  $u_1(B, R) = 0 = v$ , obwohl  $(B, R)$  kein Nash-Gleichgewicht ist.

**Aufgabe 3.4** (Nash-Gleichgewichte in symmetrischen Nullsummenspielen)

Ein Zwei-Spieler-Spiel ist *symmetrisch*, falls  $A_1 = A_2$  und  $u_1(a_1, a_2) = u_2(a_2, a_1)$  für alle  $a_1, a_2 \in A_1$ . Zeigen Sie, dass in jedem symmetrischen Nullsummenspiel die Auszahlung jedes Spielers in jedem Nash-Gleichgewicht 0 ist.

**Lösung:**

Sei  $G$  ein symmetrisches Nullsummenspiel mit Nash-Gleichgewicht  $(x^*, y^*)$ . Es gilt  $u_1(x^*, y^*) \geq u_1(y^*, y^*) = u_2(y^*, y^*) \geq u_2(y^*, x^*) = u_1(x^*, y^*)$ . Die beiden  $\geq$ -Zeichen folgen aus der Nash-Gleichgewichtseigenschaft, die beiden  $=$ -Zeichen aus der Symmetrie. Da links und rechts der Ungleichungskette derselbe Wert steht, müssen alle Werte übereinstimmen, insbesondere muss gelten  $u_1(x^*, y^*) = u_2(y^*, y^*)$ . Außerdem gilt wegen der Symmetrie und weil es sich um ein Nullsummenspiel handelt,  $u_2(y^*, y^*) = u_1(y^*, y^*) = -u_2(y^*, y^*)$  und damit  $u_2(y^*, y^*) = 0$ . Mit  $u_1(x^*, y^*) = u_2(y^*, y^*)$  folgt  $u_1(x^*, y^*) = 0$ . Dass auch  $u_2(x^*, y^*) = 0$  ist, folgt mit  $u_1(x^*, y^*) + u_2(x^*, y^*) = 0$ .