

Spieltheorie

Prof. Dr. B. Nebel, Dr. M. Helmert
Wintersemester 2007/2008

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 2 — Lösungen

Aufgabe 2.1 (Präferenzrelationen und Nutzenfunktionen)

Sei $A = \{x, y, z\}$ die Menge der möglichen Ausgänge eines strategischen Spiels und seien $u, u', u'' : A \rightarrow \mathbb{R}$ die folgenden Nutzenfunktionen: $u(x) = 0, u(y) = 1, u(z) = 4, u'(x) = -1, u'(y) = 0, u'(z) = 2, u''(x) = 0, u''(y) = 0, u''(z) = 8$.

Zwei Nutzenfunktionen sind äquivalent, wenn sie dieselbe Präferenzrelation repräsentieren.

- (a) Sind u und u' (u und u'') äquivalent?

Lösung:

Präferenzrelationen \succeq sind vollständige, reflexive, transitive binäre Relationen. Wir schreiben $x \succeq y$, wenn $u(x) \geq u(y)$, und außerdem abkürzend $x \succ y$, wenn $u(x) > u(y)$, d.h. wenn $x \succeq y$ und $y \not\succeq x$. Gilt $x \succeq y$ und $y \succeq x$, so schreiben wir auch $x \approx y$.

Sei \succeq (\succeq', \succeq'') die von u (u', u'') induzierte Präferenzrelation. Dann gilt

$$\begin{aligned} z \succ y \succ x & \quad \text{d. h. } \succeq &= \{(z, z), (z, y), (z, x), (y, y), (y, x), (x, x)\} \\ z \succ' y \succ' x & \quad \text{d. h. } \succeq' &= \{(z, z), (z, y), (z, x), (y, y), (y, x), (x, x)\} \\ z \succ'' y \approx'' x & \quad \text{d. h. } \succeq'' &= \{(z, z), (z, y), (z, x), (y, y), (y, x), (x, x), (x, y)\} \end{aligned}$$

Also gilt $\succeq = \succeq'$, aber nicht $\succeq = \succeq''$, d.h. u und u' sind äquivalent, aber nicht u und u'' .

- (b) Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A , Nutzenfunktionen $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ und Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ die Nutzenfunktionen u und $\alpha u + \beta$ äquivalent sind.

Lösung:

Seien $x, y \in A$ und seien \succeq und \succeq' die von u bzw. $\alpha u + \beta$ induzierten Präferenzrelationen. Dann gilt $x \succeq' y$ gdw. $\alpha u(x) + \beta \geq \alpha u(y) + \beta$ gdw. $\alpha u(x) \geq \alpha u(y)$ gdw. $u(x) \geq u(y)$ gdw. $x \succeq y$. Also ist $\succeq' = \succeq$ und damit sind u und $\alpha u + \beta$ äquivalent.

Aufgabe 2.2 (Schwach dominierte Strategien)

Geben Sie ein strategisches Spiel mit zwei Spielern und endlichen Aktionsmengen an, in dem genau ein Nash-Gleichgewicht (a_1, a_2) existiert und sowohl a_1 als auch a_2 schwach dominiert werden.

Lösung:

Eine mögliche Lösung ist das Spiel G mit zwei Spielern 1 und 2, Aktionsmengen $A_1 = \{a_1, a'_1, a''_1\}$ und $A_2 = \{a_2, a'_2, a''_2\}$ und der folgenden Auszahlungsmatrix:

		Spieler 2		
		a_2	a'_2	a''_2
Spieler 1	a_1	3, 3	0, 3	1, 0
	a'_1	3, 0	1, 2	2, 1
	a''_1	0, 1	2, 1	1, 2

In diesem Spiel ist (a_1, a_2) das einzige Nash-Gleichgewicht, denn in jedem anderen Strategieprofil hat mindestens einer der Spieler einen Anreiz, von seiner Strategie abzuweichen. Die Aktion a_1 wird von a'_1 schwach dominiert, entsprechend dominiert a'_2 die Aktion a_2 schwach.

Hier ist das Nash-Gleichgewicht, das durch die schwach dominierten Strategien gebildet wird, effizient. Ein alternatives Beispiel ist die folgende Nutzenmatrix:

		Spieler 2		
		a_2	a'_2	a''_2
Spieler 1	a_1	-5, -5	-5, -5	-5, -5
	a'_1	-5, -5	1, -1	-1, 1
	a''_1	-5, -5	-1, 1	1, -1

Auch hier ist (a_1, a_2) das einzige Nash-Gleichgewicht und a_1 wird von a'_1 schwach dominiert, entsprechend dominiert a'_2 die Aktion a_2 schwach.

Aufgabe 2.3 (Beste-Antwort-Funktion)

Sei $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ mit $N = \{1, 2\}$, $A_1 = A_2 = \mathbb{R}^{\geq 0}$, $u_i(a_1, a_2) = a_i \cdot (c + a_{3-i} - a_i)$ für alle $(a_1, a_2) \in A$, wobei $c > 0$ eine Konstante ist.

Bestimmen Sie die Nash-Gleichgewichte dieses Spiels, indem Sie die Beste-Antwort-Funktionen der beiden Spieler konstruieren und analysieren.

Lösung:

Ein Strategieprofil (a_1, a_2) ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn a_1 eine beste Antwort auf a_2 und a_2 eine beste Antwort auf a_1 ist. Untersuchen wir das Spiel auf beste Antworten von Spieler i auf Aktionen a_{3-i} von Spieler $3-i$. Der Nutzen von Spieler i ist

$$u_i(a_1, a_2) = -a_i^2 + (c + a_{3-i}) \cdot a_i$$

Die Aktion a_i ist genau dann eine beste Antwort auf a_{3-i} , wenn sie, gegeben a_{3-i} , $u_i(a_1, a_2)$ maximiert. Bei der Maximierung von u_i aus Sicht von Spieler i ist der Term $c + a_{3-i}$ konstant. Ein Maximum liegt also genau dann vor, wenn

$$\frac{\partial}{\partial a_i} u_i(a_1, a_2) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial a_i^2} u_i(a_1, a_2) < 0.$$

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial a_i} u_i(a_1, a_2) = -2a_i + c + a_{3-i} = 0 \quad \text{gdw.} \quad a_i = \frac{1}{2}(c + a_{3-i}).$$

Ferner gilt unabhängig von a_i , dass

$$\frac{\partial^2}{\partial a_i^2} u_i(a_1, a_2) = -2 < 0,$$

das Extremum ist also auf jeden Fall ein Maximum.

Damit ist a_i genau dann eine beste Antwort auf a_{3-i} , wenn $a_i = \frac{1}{2}(c + a_{3-i})$. Ein Nash-Gleichgewicht $a^* = (a_1^*, a_2^*)$ liegt genau dann vor, wenn $a^* = \frac{1}{2}(c + a^*)$. Nach Auflösen erhält man $a^* = (c, c)$, das einzige Nash-Gleichgewicht von G .

Aufgabe 2.4 (Auszahlungen bei Nash-Gleichgewichten)

- (a) Geben Sie die Auszahlungsmatrizen von Zwei-Personen-Spielen G und G' mit der folgenden Eigenschaft an: G' entsteht aus G , indem einige der Nutzenwerte von Spieler 1 erhöht werden und die Nutzenwerte von Spieler 2 unverändert bleiben, und es gibt ein Nash-Gleichgewicht in G' , in dem Spieler 1 eine geringere Auszahlung erhält als in allen Nash-Gleichgewichten von G .

Lösung:

Sei G durch die folgende Auszahlungsmatrix definiert:

		Spieler 2	
		L	R
Spieler 1	T	$3, 3$	$1, 1$
	B	$1, 0$	$0, 1$

G besitzt genau ein Nash-Gleichgewicht, nämlich (T, L) , mit der Auszahlung 3 für Spieler 1. Das Spiel G' erhalten wir, indem wir die Auszahlungen für Spieler 1 für seine Aktion B erhöhen, etwa zu:

		Spieler 2	
		L	R
Spieler 1	T	$3, 3$	$1, 1$
	B	$4, 0$	$2, 1$

Auch G' besitzt ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht, allerdings ein anderes als G , nämlich (B, R) . Hier bekommt Spieler 1 die Auszahlung 2, also weniger als in dem Nash-Gleichgewicht von G .

- (b) Geben Sie die Auszahlungsmatrizen von Zwei-Personen-Spielen G und G' mit der folgenden Eigenschaft an: G' entsteht aus G durch Streichung einer Aktion von Spieler 1, und G' besitzt ein Nash-Gleichgewicht, in dem der Nutzen von Spieler 1 höher ist als in allen Nash-Gleichgewichten von G .

Lösung:

Sei nun G das veränderte Spiel aus der vorherigen Teilaufgabe mit der Nash-Gleichgewichts-Auszahlung von 2 für Spieler 1:

		Spieler 2	
		L	R
Spieler 1	T	$3, 3$	$1, 1$
	B	$4, 0$	$2, 1$

Streicht man die Aktion B von Spieler 1, so bleibt folgendes Spiel übrig:

		Spieler 2	
		L	R
Spieler 1	T	$3, 3$	$1, 1$

In diesem Spiel ist wieder (T, L) das einzige Nash-Gleichgewicht mit Auszahlung 3 für Spieler 1.