

# Spieltheorie

Prof. Dr. B. Nebel, Dr. M. Helmert  
Wintersemester 2007/2008

Universität Freiburg  
Institut für Informatik

## Übungsblatt 1 — Lösungen

### Aufgabe 1.1 (Wahlen)

Zwei Kandidaten  $K_1$  und  $K_2$  treten bei einer Wahl gegeneinander an. Eine ungerade Anzahl  $n$  von Wählern stimmt für jeweils einen der Kandidaten, gewählt ist der Kandidat mit der Mehrheit der Stimmen. Eine Mehrheit von  $m$  Wählern,  $\frac{n+1}{2} \leq m \leq n$ , bevorzugt Kandidaten  $K_1$ . Wähler sind indifferent zwischen Aktionsprofilen, die zu demselben Wahlausgang (d.h. demselben gewählten Kandidaten) führen, und bevorzugen Aktionsprofile, bei denen ihr präferierter Kandidat gewinnt, gegenüber solchen, bei denen der Gegenkandidat gewinnt.

- (a) Modellieren Sie das Spiel als strategisches Spiel unter Angabe von Spielermenge, Aktionsmengen und passenden Nutzenfunktionen. Geben Sie die Nutzenfunktion für den Fall  $n = 3$  und  $m = 2$  in Matrixform an.

#### Lösung:

Das Spiel kann formalisiert werden als  $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$  mit  $N = \{1, \dots, n\}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Spieler, die den Kandidaten  $K_1$  bevorzugen, die Spieler mit den Nummern  $1, \dots, m$ . Der bevorzugte Kandidat von Spieler  $i$  sei  $K(i)$ , d.h.  $K(i) = K_1$ , falls  $1 \leq i \leq m$ , und  $K(i) = K_2$ , sonst. Die Aktionsmengen sind  $A_i = \{K_1, K_2\}$  für alle  $i \in N$  und eine Familie von Nutzenfunktionen, die die Präferenzen korrekt wiedergeben, ist beispielsweise

$$u_i(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |\{j \in \{1, \dots, n\} \mid a_j = K(i)\}| \geq \frac{n+1}{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für drei Wähler lassen sich die Nutzenfunktionen noch in Matrixform angeben:

		Spieler 2	
		$K_1$	$K_2$
Spieler 1	$K_1$	1, 1, 0	1, 1, 0
	$K_2$	1, 1, 0	0, 0, 1
		Spieler 3: $K_1$	

		Spieler 2	
		$K_1$	$K_2$
Spieler 1	$K_1$	1, 1, 0	0, 0, 1
	$K_2$	0, 0, 1	0, 0, 1
		Spieler 3: $K_2$	

- (b) Zeigen Sie, dass die Strategie, für den Kandidaten zu stimmen, den man weniger bevorzugt, von der Strategie, für den bevorzugten Kandidaten zu stimmen, schwach dominiert wird.

#### Lösung:

Wir betrachten die Aufgabe aus Sicht von Spieler  $i \in N$ , wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $K(i) = K_1$ . Sei  $a_i = K_1$  und  $a'_i = K_2$ . Es ist zu zeigen, dass  $u_i(a_{-i}, a_i) \geq u_i(a_{-i}, a'_i)$  für alle Strategieprofile  $a_{-i} \in A_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} A_j$  der anderen Wähler, und dass  $u_i(a_{-i}, a_i) > u_i(a_{-i}, a'_i)$  für mindestens ein  $a_{-i} \in A_{-i}$ . Sei also  $a_{-i} \in A_{-i}$ .

- Falls  $u_i(a_{-i}, a_i) = 1$ , dann ist klar, dass  $u_i(a_{-i}, a_i) \geq u_i(a_{-i}, a'_i)$  gilt, denn  $u_i$  kann nur die Werte 0 und 1 annehmen.
- Falls  $u_i(a_{-i}, a_i) = 0$ , dann hat der von Spieler  $i$  bevorzugte Kandidat die Wahl verloren, und verliert sie bei einer Strategieänderung von Spieler  $i$  von  $a_i$  zu  $a'_i$  erst recht. Also ist auch  $u_i(a_{-i}, a'_i) = 0$ .
- Bleibt noch zu zeigen, dass  $u_i(a_{-i}, a_i) > u_i(a_{-i}, a'_i)$  für mindestens ein  $a_{-i} \in A_{-i}$ . Die Profile  $a_{-i}$ , für die das gilt, sind genau die, bei denen die Stimme von Spieler  $i$  den Wahlausgang entscheidet, d. h. in denen  $|\{j \in \{1, \dots, n\} \mid a_j = K(i)\}| = \frac{n+1}{2}$  gilt. Offensichtlich gibt es solche Strategieprofile.

- (c) Finden Sie alle Nash-Gleichgewichte des Spiels. Betrachten Sie dazu zuerst die Aktionsprofile, in denen einer der Kandidaten mit nur einer Stimme Vorsprung gewinnt, und dann die Aktionsprofile, die zu einem größeren Vorsprung des Gewinners führen.

**Lösung:**

- Fall 1: Einer der Kandidaten gewinnt mit einer Stimme Vorsprung.
  - Fall 1.a: Mindestens ein Wähler, der den unterlegenen Kandidaten bevorzugt, stimmt für den Gewinner. Dann kann dieser Wähler seinen Nutzen erhöhen, indem er für seinen bevorzugten Kandidaten stimmt und ihm damit zum Sieg verhilft. Das Strategieprofil ist also kein Nash-Gleichgewicht.
  - Fall 1.b: Alle Wähler, die den unterlegenen Kandidaten bevorzugen, haben auch für ihn gestimmt. Dann kann sich keiner der Anhänger des unterlegenen Kandidaten verbessern, indem er seine Strategie ändert, und auch keiner der Anhänger des Gewinners kann sich durch Wahl einer anderen Aktion noch verbessern, da er ohnehin schon seinen maximalen Nutzen erreicht hat. Also liegt ein Nash-Gleichgewicht vor.
- Fall 2: Einer der Kandidaten gewinnt mit mehr als einer Stimme Vorsprung. Dann kann keiner der Wähler durch Änderung seiner Strategie das Wahlergebnis ändern, solange alle anderen Wähler ihre Strategie beibehalten. Also ist das Strategieprofil ein Nash-Gleichgewicht (unabhängig davon, ob jeder Wähler den von ihm bevorzugten Kandidaten gewählt und welcher Kandidat die Wahl tatsächlich gewonnen hat).

Damit sind alle Strategieprofile klassifiziert.

**Aufgabe 1.2** (Verhandlungen)

Zwei Spieler verhandeln darüber, wer welchen Anteil von einem gegebenen Kuchen bekommt. Beide Spieler können Anteile  $a_i \in [0, 1]$  für sich fordern. Summieren sich die Forderungen höchstens zu 1, so erhält jeder Spieler den von ihm beanspruchten Teil, sonst erhalten beide Spieler nichts.

- (a) Formalisieren Sie das Spiel als strategisches Zweipersonenspiel, d.h. geben Sie Spielermenge, Aktionsmengen und Nutzenfunktionen an.

**Lösung:**

Das Spiel kann formalisiert werden als  $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ , wobei  $N = \{1, 2\}$ ,  $A_1 = A_2 = [0, 1]$  und für  $i \in N$ :

$$u_i(a_1, a_2) = \begin{cases} a_i & \text{falls } a_1 + a_2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (b) Untersuchen Sie das Spiel auf Nash-Gleichgewichte.

**Lösung:**

Die Nash-Gleichgewichte von  $G$  sind genau die Strategieprofile  $(a_1, a_2)$  mit  $a_1 + a_2 = 1$  und das Profil  $(1, 1)$ .

Um das zu beweisen, müssen wir vier Fälle unterscheiden (sei dazu  $s = a_1 + a_2$ ):

- Falls  $0 \leq s < 1$ : Dann gilt auch  $a_1, a_2 < 1$  und Spieler  $i$  kann seinen Nutzen von  $a_i$  auf  $a_i + (1 - s) = 1 - a_{3-i}$  erhöhen, wenn er die entsprechende Forderung stellt. Also liegt kein Nash-Gleichgewicht vor.
- Falls  $s = 1$ : Spieler  $i$  kann seinen Nutzen nicht erhöhen, ohne dass Spieler  $3 - i$  seine Strategie gleichzeitig ändert. Würde Spieler  $i$  mehr ( $a'_i > a_i$ ) fordern, so wäre die Obergrenze für die gesamten Forderungen überschritten beide Spieler erhielten Nutzen 0, was für Spieler  $i$  keine Verbesserung gegenüber  $a_i$  wäre. Würde er weniger ( $a'_i < a_i$ ) fordern, so würde sich sein Nutzen von  $a_i$  auf  $a'_i$  verringern. Also liegt ein Nash-Gleichgewicht vor.
- Falls  $1 < s < 2$ : In diesem Fall muss  $a_1, a_2 > 0$  gelten. Außerdem muss ein Spieler weniger als 1 fordern, o.B.d.A.  $a_2 < 1$ . Wegen  $s > 1$  ist  $u_1(a_1, a_2) = 0$ . Spieler 1 kann seinen Nutzen also auf  $1 - a_2 > 0$  erhöhen, indem er die Strategie  $1 - a_2$  spielt. Diese Strategie ist möglich, denn nach Voraussetzung gilt auch  $1 - a_2 < 1$ . Also liegt kein Nash-Gleichgewicht vor.
- Falls  $s = 2$ : Dann muss  $a_1 = a_2 = 1$  gelten. Beide Spieler erhalten Nutzen 0. Jedoch kann sich keiner der beiden Spieler durch einseitige Änderung seiner Strategie verbessern, denn für jedes  $0 < a'_i < 1$  wäre immer noch  $a'_i + a_{3-i} = a'_i + 1 > 1$  und damit  $u_i(a'_i, a_{3-i}) = 0$ , und für  $a'_i = 0$  wäre zwar  $a'_i + a_{3-i} = 0 + 1 = 1$ , aber  $u_i(a'_i, a_{3-i}) = u_i(0, 1) = 0$ . Also ist  $(1, 1)$  ein Nash-Gleichgewicht.

Weitere Fälle sind nicht möglich.