Spieltheorie

Prof. Dr. B. Nebel, Dr. M. Helmert
Wintersemester 2007/2008

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 12

Abgabe: Montag, 4. Februar 2008

Aufgabe 12.1 (Satz von Gibbard-Satterthwaite, 2 Punkte)

Zeigen Sie, ohne den Satz von Gibbard-Satterthwaite zu verwenden, dass es für $|A| \geq 3$ und beliebiges festes $a^* \in A$ keine anreizkompatible soziale Entscheidungsfunktion $f : L^n \to A$ geben kann mit

$$f(\prec_1, \dots, \prec_n) = \begin{cases} a, & \text{falls } b \prec_i a \text{ für alle } b \neq a \text{ und } i = 1, \dots, n \\ a^*, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 12.2 (Machtindizes, 6 Punkte)

Betrachten Sie das Wahlverfahren, bei dem $A = \{ja, nein\}$ ist, wo Wähler $i \in N = \{1, \dots, n\}$ das Stimmgewicht $w(i) \in \mathbb{N}$ hat, und wo $f(\prec_1, \dots, \prec_n) = ja$ gdw. $\sum_{i \in J} w(i) \geq \vartheta$ für $J = \{i \in N \mid nein \prec_i ja\}$ und einen vorgegebenen Schwellwert $\vartheta \in \mathbb{N}$.

(a) **Banzhafs Machtindex:** Eine Menge $S \subseteq N$ heißt *Erfolgskoalition*, wenn $\sum_{i \in S} w(i) \geq \vartheta$. Ein Paar $(S, S \setminus \{i\})$ mit $i \in S \subseteq N$ heißt *Erfolgskombination für Wähler i*, falls S eine Erfolgskoalition und $S \setminus \{i\}$ keine Erfolgskoalition ist. Sei δ_i die Anzahl der Erfolgskombinationen für Wähler i, und $\delta = \sum_{i \in N} \delta_i$. *Banzhafs Machtindex für Wähler i* ist dann der Wert $\beta_i = \delta_i / \delta$. Berechnen Sie die Machtindizes für $i = 1, \dots, 4$, wenn $w(1) = 4$, $w(2) = 4$, $w(3) = 2$, $w(4) = 1$ und $\vartheta_1 = 6$ bzw. $\vartheta_2 = 7$.

(b) **Absoluter Penrose-Banzhaf-Index und das Quadratwurzelgesetz:** Der *absolute Penrose-Banzhaf-Index für Wähler i* ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Stimme von Wähler i entscheidend ist, also $B_i = \delta_i / 2^{n-1}$. Zeigen Sie, dass für uniforme Stimmgewichte $w(i) = 1$ für $i = 1, \dots, n$ und $n = 2k + 1$ sowie $\vartheta = \lceil \frac{n}{2} \rceil = k + 1$ die absoluten Penrose-Banzhaf-Indizes aller Wähler jeweils (näherungsweise) den Wert $(\sqrt{\pi k})^{-1}$ haben, also proportional zu $1/\sqrt{n}$ sind.
Hinweis: Berechnen Sie, auf wieviele Arten sich für einen festen Wähler i die $2k$ anderen Wähler entscheiden können, und in wie vielen dieser Fälle die Stimme von Wähler i entscheidend ist. Verwenden Sie die Stirlingsche Formel $k! \approx k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{k}$.

Die Übungsblätter dürfen und sollten in Gruppen von zwei Studenten bearbeitet werden. Bitte schreiben Sie beide Namen auf Ihre Lösung.