

Wissensrepräsentation

Prof. Dr. Nebel, Dr. Wölfl
M. Helmert, M. Ragni
WS 2005/2006

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 1 — Lösungen

Aufgabe 1.1 (Aussagenlogik)

- (a) Wie viele verschiedene Formeln (mit verschiedenen Wahrheitsbelegungen) können aus den atomaren Formeln A_1, \dots, A_l konstruiert werden?

Lösung:

Natürlich 2^{2^l} – die Kardinalität der Potenzmenge von 2^l möglichen Belegungen der l Formeln.

- (b) Geben Sie eine dreielementige aussagenlogische Formelmengung F an, so dass jede zweielementige Teilmenge von F erfüllbar ist, F selbst jedoch nicht.

Lösung:

Die Formelmengung $F = \{A, B, \neg(A \wedge B)\}$ hat die geforderte Eigenschaft.

- (c) Beweisen oder widerlegen Sie für Formeln F und G :

- Falls $(F \rightarrow G)$ gültig ist und F gültig ist, so ist G gültig.

Lösung:

Für eine beliebige Belegung I gilt $I \models F \rightarrow G$ und $I \models F$. Damit gilt auch $I \models G$. Also gilt G für beliebige Belegungen und ist somit eine gültige Formel.

- Falls $(F \rightarrow G)$ erfüllbar ist und F erfüllbar ist, so ist G erfüllbar.

Lösung:

Gegenbeispiel: Für $F = A$ und $G = (B \wedge \neg B)$ sind $F \rightarrow G$ und F jeweils erfüllbar, G jedoch nicht.

- Falls $(F \rightarrow G)$ gültig ist und F erfüllbar ist, so ist G erfüllbar.

Lösung:

Da F erfüllbar ist, gibt es eine Belegung I mit $I \models F$. Da $F \rightarrow G$ gültig ist, gilt ferner $I \models F \rightarrow G$. Zusammen gilt somit $I \models G$, also ist G erfüllbar.

- (d) Zeigen Sie mittels der Resolutionsmethode, dass $A \wedge B \wedge C$ eine Folgerung aus der Klauselmengung

$$F = \{\{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{A, \neg C\}, \{A, B, C\}\}$$

ist.

Lösung:

- $A \wedge B \wedge C$ folgt aus F genau dann, wenn $G := F \cup \{\neg A, \neg B, \neg C\}$ unerfüllbar ist. Das zeigen wir mittels des folgenden Resolutionsbeweises:
 - $\{A, \neg C\}$ und $\{A, B, C\}$ resolviert zu $\{A, B\}$.
 - $\{A, \neg C\}$ und $\{\neg A, \neg B, \neg C\}$ resolviert zu $\{\neg B, \neg C\}$.
 - $\{A, B\}$ und $\{\neg A, B\}$ resolviert zu $\{B\}$.
 - $\{\neg B, \neg C\}$ und $\{\neg B, C\}$ resolviert zu $\{\neg B\}$.
 - $\{\neg B\}$ und $\{B\}$ resolviert zur leeren Klausel, was die Unerfüllbarkeit zeigt.

Aufgabe 1.2 (Hornformeln)

- (a) Geben Sie eine aussagenlogische Formel an, zu der es keine äquivalente Hornformel gibt. Geben Sie eine kurze Begründung.

Lösung:

Die Formel $A \vee B$ ist nicht durch Hornklauseln darstellbar. Die Klausel besteht aus zwei positiven Literalen, Hornklauseln dürfen aber höchstens eines besitzen.

Ein formaler Beweis, dass es zu der Formel keine äquivalente Hornformel gibt, ist deutlich schwieriger und beruht auf der Idee, dass für Hornformeln gilt: Belegt man alle Variablen mit „wahr“, die in *jeder* erfüllenden Interpretation wahr sind und alle anderen Variablen mit „falsch“, dann erhält man eine erfüllende Interpretation. Das ist für $A \vee B$ nicht der Fall.

- (b) Beweisen Sie: Jede Hornformel kann in polynomieller Zeit auf Erfüllbarkeit getestet werden.

Lösung:

Zunächst einmal bringen wir die Klauseln der Hornformel in Implikationsschreibweise: Rein positive Klauseln A werden als $\top \rightarrow A$ geschrieben, gemischte Klauseln $A \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_k$ als $B_1 \wedge \dots \wedge B_k \rightarrow A$, und rein negative Klauseln $\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_k$ als $B_1 \wedge \dots \wedge B_k \rightarrow \perp$.

Auf die umgeschriebene Hornformel wenden wir dann wiederholt die folgenden Regeln an, bis keine Regel mehr anwendbar ist:

- (a) Belege für jede Regel $\top \rightarrow A$ die Variable A mit „wahr“.
- (b) Belege für jede Regel $B_1 \wedge \dots \wedge B_k \rightarrow A$ die Variable A mit „wahr“, falls bereits alle Variablen B_i mit „wahr“ belegt sind.

Dies geht sicher in polynomieller Zeit und stellt sicher, dass alle Implikationen, deren rechte Seite *nicht* \perp ist, erfüllt sind. Alle von uns mit „wahr“ belegten Variablen müssen offenbar in jeder Interpretation, die die Hornformel erfüllt, mit wahr belegt werden, denn ansonsten wäre eine der betrachteten Implikationen nicht erfüllt.

Um eine erfüllende Belegung zu erzielen, müssen wir noch dafür sorgen, dass die linken Seiten aller Implikationen, deren rechte Seite \perp ist, nicht erfüllt werden. Offenbar werden möglichst wenige linke Seiten erfüllt, wenn wir die noch nicht belegten Variablen mit „falsch“ belegen. Also wählen wir diese Belegung und überprüfen, ob sie die verbleibenden Implikationen erfüllt.

Falls ja, ist die Formel erfüllbar, ansonsten nicht.

(c) Ist die folgende Hornformel

$$F = E \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge D \wedge (\neg D \vee C) \wedge A \wedge B$$

erfüllbar?

Lösung:

Wir führen einen Resolutionsbeweis:

- $\{\neg A, \neg B, \neg C\}$ und $\{A\}$ resolviert zu $\{\neg B, \neg C\}$.
- $\{\neg B, \neg C\}$ und $\{B\}$ resolviert zu $\{\neg C\}$.
- $\{\neg C\}$ und $\{\neg D, C\}$ resolviert zu $\{\neg D\}$.
- $\{\neg D\}$ und $\{D\}$ resolviert zur leeren Klausel.

Da wir die leere Klausel herleiten können, ist F nicht erfüllbar.