Runde t	δ_1^t	δ_2^t	$Risiko_1^t$	$Risiko_2^t$
1	$(5,0)$	$(0,5)$	1	1
2	$(4,1)$	$(0,5)$	1	$4/5$
3	$(4,1)$	$(0,5)$		

Die Verhandlung endet also mit der Konfliktvereinbarung.

Satz 19 (Satz von Harsanyi). *Wenn beide Agenten die Zeuthen-Strategie verfolgen, dann einigen sie sich auf eine Vereinbarung, die das Produkt der Nutzenwerte der beiden Spieler maximiert.*

Lemma 20. *Spieler i macht nach t Schritten ein Zugeständnis gdw. $\pi(\delta_i^t) \leq \pi(\delta_j^t)$, wobei $\pi(\delta) := U_1(\delta)U_2(\delta)$.*

Beweis. Es ist

$$Risiko_i^t = \frac{U_i(\delta_i^t) - U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} = 1 - \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
Risiko_i^t \leq Risiko_j^t \quad & \text{gdw.} \quad 1 - \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} \leq 1 - \frac{U_j(\delta_i^t)}{U_j(\delta_j^t)} \\
& \text{gdw.} \quad \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} \geq \frac{U_j(\delta_i^t)}{U_j(\delta_j^t)} \\
& \text{gdw.} \quad U_i(\delta_j^t) \cdot U_j(\delta_j^t) \geq U_j(\delta_j^t) \cdot U_i(\delta_j^t) \\
& \text{gdw.} \quad \pi(\delta_j^t) \geq \pi(\delta_i^t).
\end{aligned}$$

□

Lemma 21. *Macht Spieler i nach t Schritten ein Zugeständnis, so gilt $\pi(\delta_i^{t+1}) \geq \pi(\delta_j^t)$.*

Beweis. Analog zum vorherigen Lemma. □

Beweis des Satzes von Harsanyi. Aus den beiden Lemmata folgt, dass die Abbildung $n \mapsto \max\{\pi(\delta_1^n), \pi(\delta_2^n)\}$ monoton wächst, denn macht Spieler i ein Zugeständnis, so ist $\pi(\delta_i^t) \leq \pi(\delta_j^t) \leq \pi(\delta_i^{t+1})$, und macht er kein Zugeständnis, ist $\pi(\delta_i^t) = \pi(\delta_i^{t+1})$. Für die letzten Angebote gilt $\pi(\delta_1^t) = \pi(\delta_2^t)$.

Angenommen, die Spieler einigen sich auf $\delta^* \in V$, aber es gibt ein $\delta' \in V$ mit $\pi(\delta') > \pi(\delta^*)$. Dann gibt es ein $i \in \{1, 2\}$ mit $U_i(\delta') > U_i(\delta^*)$, denn angenommen, $U_i(\delta') \leq U_i(\delta^*)$ für alle $i \in \{1, 2\}$. Dann wäre wegen $U_1(\delta'), U_2(\delta'), U_1(\delta^*), U_2(\delta^*) \geq 0$ (δ', δ^* individuell rational) auch $\pi(\delta') \leq \pi(\delta^*)$.

Sei dann $n \in \mathbb{N}$ der erste Schritt, in dem Spieler i zum ersten Mal eine Vereinbarung δ_i^n mit $U_i(\delta_i^n) < U_i(\delta')$ vorschlägt, d.h. dass $U_i(\delta_i^n) < U_i(\delta')$ und $U_i(\delta_i^{n-1}) \geq U_i(\delta')$. Wegen der Monotonie gilt $\pi(\delta') > \pi(\delta_i^n) \geq \pi(\delta_i^{n-1})$. Da $\pi(\delta') > \pi(\delta_i^{n-1})$ und $U_i(\delta_i^{n-1}) \geq U_i(\delta')$, muss $U_j(\delta') > U_j(\delta_i^{n-1})$ ($j \neq i$) gelten, d.h. auch mit δ' statt δ_i^n käme Spieler i Spieler j in Schritt n entgegen, δ' wäre also eine gültige Wahl gewesen. Wegen $U_i(\delta_i^n) < U_i(\delta')$ hätte Spieler i im Widerspruch zum tatsächlichen Verlauf der Verhandlung also nicht δ_i^n, sondern δ' vorgeschlagen.