Definition 91 (Monotones Zugeständnisprotokoll). Sei (T_1, T_2) eine Begegnung in der Task-orientierten Domäne $\langle T, \{1,2\}, c\rangle$ mit Verhandlungsmenge V. Das **monotone Zugeständnisprotokoll** über reinen Vereinbarungen ist das extensive Spiel mit simultanen Zügen $\langle \{1,2\}, H, P, (u_i)_{i\in\{1,2\}}\rangle$, das wie folgt definiert ist:

1. H enthält alle endlichen Folgen von Vereinbarungspaaren $(\delta_1^n, \delta_2^n)_{n=1,\dots,t}$, für die gilt:
   a) $\delta_i^n \in V$ für alle $i \in \{1,2\}$ und $n \in \{1,\dots,t\}$,
   b) $U_i(\delta_j^n) \geq U_i(\delta_j^m)$ für alle $i, j \in \{1,2\}$ mit $i \neq j$ und $m, n \in \{1,\dots,t\}$ mit $m < n$,
   c) $U_i(\delta_j^n) > U_i(\delta_j^m)$ für mindestens ein $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2\} \setminus \{i\}$ und alle $m, n \in \{1,\dots,t-1\}$ mit $m < n$ sowie
   d) $U_i(\delta_j^n) < U_i(\delta_i^n)$ für alle $i, j \in \{1,2\}$ mit $i \neq j$ und alle $n \in \{1,\dots,t-1\}$.
2. Für alle nicht-terminalen Historien $h \in H \setminus Z$ gilt: $P(h) = \{1,2\}$.
3. Für alle terminalen Historien $h = \langle \dots, (\delta_1^*, \delta_2^*)\rangle \in Z$ definiere die **Akzeptanzmengen**

$$N_h^A = \{ i \in \{1,2\} \mid U_i(\delta_j^*) \geq U_i(\delta_i^*) \text{ für } j \in \{1,2\} \setminus \{i\} \}.$$

   Dann gilt, dass für alle $i \in \{1,2\}$:

$$u_i(h) = \begin{cases} 0, & \text{falls } N_h^A = \varnothing \\ U_i(\delta_2^*), & \text{falls } N_h^A = \{1\} \\ U_i(\delta_1^*), & \text{falls } N_h^A = \{2\} \\ \frac{1}{2}(U_i(\delta_1^*) + U_i(\delta_2^*)), & \text{falls } N_h^A = \{1,2\} \end{cases}$$

Bemerkung 92. Das monotone Zugeständnisprotokoll über reinen Vereinbarungen ist endlich.

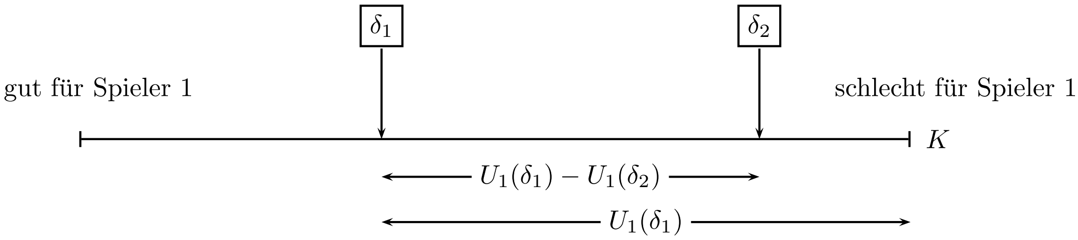
7.2.3 Verhandlungsstrategien

Sind die Verhandlungsmenge und das Verhandlungsprotokoll festgelegt, stellt sich die Frage, wie sich die Agenten bei der Verhandlung verhalten sollen. Da das monotone Zugeständnisprotokoll über reine Vereinbarungen ein extensives Spiel mit simultanen Zügen ist, sollten sie eine TPG-Strategie verfolgen – aber welche?

Beispiel 93. Betrachte die taskorientierte Domäne $\langle T, \{1,2\}, c\rangle$ mit $T = \{p,q,r,s,t\}$ und $c(T') = |T'|$ für alle $T' \subseteq T$ und darin die Begegnung $\langle \{p,q,r,s,t\}, \{p,q,r,s,t\}\rangle$, bei der beide Spieler alle fünf Aufgaben ausführen müssen. Die Verhandlungsmenge besteht aus allen Vereinbarungen mit Nutzenprofilen in $\{(5,0),(4,1),(3,2),(2,3),(4,1),(0,5)\}$. Wir identifizieren im Folgenden diese Menge der möglichen Nutzenprofile mit der Verhandlungsmenge.

Angenommen, Spieler 1 bietet am Anfang $(5,0)$ und macht keine Zugeständnisse, und Spieler 2 bietet am Anfang $(0,5)$ und kommt Spieler 1 immer um einen minimalen Schritt entgegen. Dieses Strategieprofil ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht, aber keine zufriedenstellende Lösung. Intuitiv sollte der Spieler, der bei einem Konflikt mehr zu verlieren hat, das nächste Zugeständnis machen.

Hat etwa Spieler 1 zuletzt das Angebot δ_1 und Spieler 2 das Angebot δ_2 gemacht, so hat Spieler 1 die Differenz $U_1(\delta_1) - U_1(\delta_2)$ zu verlieren, wenn er Spieler 2 ganz entgegenkommt, und $U_1(\delta_1) - U_1(K) = U_1(\delta_1)$, wenn die Verhandlung mit der Konfliktvereinbarung endet. Hat Spieler 2 bisher nur geringe Zugeständnisse gemacht, d.h. ist $U_1(\delta_1) - U_1(\delta_2)$ ähnlich groß wie $U_1(\delta_1)$, ist Spieler 1 eher bereit, durch ein Beharren auf seinem letzten Angebot das Risiko einzugehen, die Verhandlung scheitern zu lassen, als in dem Fall, dass Spieler 2 schon große Zugeständnisse gemacht hat und $U_1(\delta_1) - U_1(\delta_2)$ im Verhältnis zu $U_1(\delta_1)$ klein ist:



Definition 94 (Risikobereitschaft). Betrachte die nicht-terminale Historie $(\delta_1^n, \delta_2^n)_{n=1,\dots,t}$. Die **Risikobereitschaft** von Spieler i ist definiert als

$$\mathit{Risiko}_i^t := \frac{U_i(\delta_i^t) - U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)}.$$

Je höher der *Risiko*-Wert eines Spielers ist, desto eher geht er ein Risiko ein.

Definition 95 (Zeuthen-Strategie). Die **Zeuthen-Strategie** für Spieler i legt das folgende Verhalten des Agenten fest:

1. Biete zu Beginn eine Vereinbarung δ_i^1 aus der Verhandlungsmenge, die den Nutzen U_i maximiert.
2. Nach der Historie $(\delta_1^n, \delta_2^n)_{n=1,\dots,t}$
   - biete wieder $\delta_i^{t+1} = \delta_i^t$, falls $\mathit{Risiko}_i^t > \mathit{Risiko}_j^t$ für $i \neq j$,
   - ansonsten betrachte alle δ aus der Verhandlungsmenge mit

     $$U_j(\delta_i^t) < U_j(\delta) \leq U_j(\delta_j^t)$$

     und

     $$\underbrace{\frac{U_i(\delta) - U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta)}}_{\text{„}\mathit{Risiko}_i^{t+1}\text{“}} \geq \underbrace{\frac{U_j(\delta_j^t) - U_j(\delta)}{U_j(\delta_j^t)}}_{\text{„}\mathit{Risiko}_j^{t+1}\text{“}}.$$

     Biete dann unter diesen Vereinbarungen ein solches δ, das $U_i(\delta)$ maximiert.

Beispiel 96. Betrachte die Begegnung aus Beispiel 93. Folgen sowohl Spieler 1 als auch Spieler 2 der Zeuthen-Strategie, so ergibt sich die Verhandlung

Runde t	Spieler 1: δ_1^t	Spieler 2: δ_2^t	Risiko_1^t	Risiko_2^t
1	$(5,0)$	$(0,5)$	1	1
2	$(4,1)$	$(1,4)$	$3/4$	$3/4$
3	$(3,2)$	$(2,3)$	$1/3$	$1/3$
4	$(2,3)$	$(3,2)$		

Da beide Spieler in der letzten Runde ein Zugeständnis machen, wird das Verhandlungsergebnis zufällig aus den beiden Vereinbarungen $(2,3)$ und $(3,2)$ ausgewählt.

Folgt nur Spieler 1 der Zeuthen-Strategie, während Spieler 2 niemals Zugeständnisse macht, ergibt sich folgendes Bild:

Runde t	Spieler 1: δ_1^t	Spieler 2: δ_2^t	$Risiko_1^t$	$Risiko_2^t$
1	$(5,0)$	$(0,5)$	1	1
2	$(4,1)$	$(5,0)$	1	$4/5$
3	$(4,1)$	$(5,0)$		

Die Verhandlung endet also mit der Konfliktvereinbarung.

Satz 19 (Satz von Harsanyi). *Wenn beide Agenten die Zeuthen-Strategie verfolgen, dann einigen sie sich auf eine Vereinbarung, die das Produkt der Nutzenwerte der beiden Spieler maximiert. Eine solche Vereinbarung heißt Nash-Lösung.*

Lemma 20. *Spieler i macht nach t Schritten ein Zugeständnis gdw. $\pi(\delta_i^t) \leq \pi(\delta_j^t)$, wobei $\pi(\delta) := U_1(\delta)U_2(\delta)$.*

Beweis. Es ist

$$Risiko_i^t = \frac{U_i(\delta_i^t) - U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} = 1 - \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
Risiko_i^t \leq Risiko_j^t \quad & \text{gdw.} \quad 1 - \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} \leq 1 - \frac{U_j(\delta_i^t)}{U_j(\delta_j^t)} \\
& \text{gdw.} \quad \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} \geq \frac{U_j(\delta_i^t)}{U_j(\delta_j^t)} \\
& \text{gdw.} \quad U_i(\delta_j^t) \cdot U_j(\delta_j^t) \geq U_j(\delta_j^t) \cdot U_i(\delta_j^t) \\
& \text{gdw.} \quad \pi(\delta_j^t) \geq \pi(\delta_i^t).
\end{aligned}$$

□

Lemma 21. *Macht Spieler i nach t Schritten ein Zugeständnis, so gilt $\pi(\delta_i^{t+1}) \geq \pi(\delta_j^t)$.*

Beweis. Analog zum vorherigen Lemma. □

Beweis des Satzes von Harsanyi. Aus den beiden Lemmata folgt, dass die Abbildung $n \mapsto \max\{\pi(\delta_1^n), \pi(\delta_2^n)\}$ monoton wächst. Für die finalen Angebote gilt $\pi(\delta_1^t) = \pi(\delta_2^t)$.

Angenommen, die Spieler einigen sich auf $\delta^* \in VM$, aber es gibt ein $\delta' \in VM$ mit $\pi(\delta') > \pi(\delta^*)$. Wegen $\pi(\delta') \neq \pi(\delta^*)$ und da δ' Pareto-optimal ist, gibt es ein $i \in N$ mit $U_i(\delta') > U_i(\delta^*)$.

Dann hätte aber Spieler i in dem Schritt, in dem er zum ersten Mal eine Vereinbarung δ mit $U_i(\delta) \leq U_i(\delta')$ vorgeschlagen hat, statt dessen auch δ' vorschlagen können. δ' wäre eine gültige Wahl gewesen, da $\pi(\delta') > \pi(\delta^*)$ und wegen Monotonie $\pi(\delta^*) \geq \pi(\delta)$. Außerdem wäre Spieler i Spieler j damit weniger weit entgegen gekommen. Also hätte Spieler i im Widerspruch zum tatsächlichen Verlauf der Verhandlung nicht δ vorgeschlagen. Somit maximiert die Vereinbarung δ^*, auf die sich die Spieler einigen, den Produktnutzen π. □