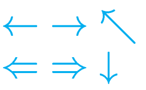
Algorithmen und Datenstrukturen
(Th. Ottmann und P. Widmayer)

Folien: Einfache Sortierverfahren

Autor: Stefan Edelkamp

Institut für Informatik
Georges-Köhler-Allee
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

1 Überblick



Überblick

Das Sortierproblem

Grundlegende Implementation

Auswahlsort

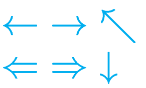
Sortieren durch Einfügen

Shellsort

Mergesort

Quicksort

2 Das Sortierproblem



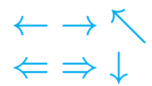
- Gegeben: Folge $s[1], \ldots, s[n]$ von n Sätzen; jeder Satz $s[i]$ hat einen Schlüssel k_i.
- Gesucht: Permutation π, die die Anordnung der Sätze gemäß ihtet Schlüssel in aufsteigende Reihenfolge bringt:

$$k_{\pi(1)} \leq k_{\pi(2)} \leq \cdots \leq k_{\pi(n)}.$$

Ausgabe: Sätze in aufsteigender Reihenfolge
- in einem Array (internes Sortieren)
- in einer Datei auf Festplatte oder Magnetband
(externes Sortieren)

In situ-Verfahren: Verfahren, die wenig zusätzlichen Speicherplatz benötigen.

Allgemeine Sortierverfahren



Schlüsselvergleiche ($<$, $=$, $>$) sind die einzige verwendbare Information zur Lösung des Sortierproblems.

1. Beispiele:

(a) Bubblesort, Auswahlsort Sortieren durch Einfügen, Shellsort
(b) Mergesort
(c) Quicksort
(d) Clever-Quicksort
(e) Heapsort
(f) Weak-Heapsort

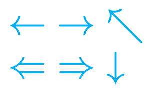
2. Untere Schranken

3. Spezielle Sortierverfahren:
Schlüssel sind ganze Zahlen
Verwendung von $*$, $/$, shift, mod, etc.

(a) Radix (exchange-) Sort
(b) Sortieren durch Fachverteilung

4. Sortieren vorsortierter Daten:
Verfahren für besondere Eingaben

Elementare Sortierverfahren



Laufzeitmessung:
a. # Schlüsselvergleiche (comparisons)
$C_{min}(n)$ (best case)
$C_{max}(n)$ (worst case)
$C_{av}(n)$ (average case)*

b. # Datenbewegungen (movements) M_{min}, M_{max}, M_{av}^*

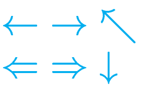
* Im average case: Mittelung über alle $n!$ Anordnungen von n verschiedenen Sätzen

Messung der Anzahl der Vergleiche
1. Für die meisten Sortierverfahren: $M_x \in O(C_x)$, $x = max, min, av$
2. Datenbewegung: Pointerzuweisung,
Schlüsselvergleich: Vergleich der einzelnen Zeichen

Beispiel: Bubblesort

$$
\begin{aligned}
C_{min}(n) &= n-1, \qquad M_{min} = 0 \\
C_{max}(n) &= \frac{1}{2}n(n-1) = M_{max} \\
C_{av}(n) &\in O(n^2), \qquad M_{av}(n) \in O(n^2)
\end{aligned}
$$

3 Grundlegende Implementation



Rahmenprogramm: `SortAlgTest.java`: Programm zum Testen von Sortieralgorithmen

```
public class SortAlgTest {
  public static void main(String args[]){
    int vec[] = {15, 2, 43, 17, 4, 8, 47};
    if (args.length != 0) {
      vec = new int [args.length];
      for (int j=0; j<args.length;j++) {
        vec[j] = Integer.valueOf(args[j]).intValue();
      }
    }
    /* t[0] wird als Stopper verwendet */
    OrderableInt t[] = OrderableInt.array (vec);
    SortAlgorithm.printArray(t);
    SortAlgorithm.sort(t);
    SortAlgorithm.printArray (t);
  }
}
```

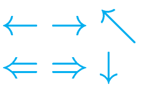
Interface: `Orderable.java`: Beschreibt das Verhalten vergleichbarer Objekte

```
interface Orderable {
  public boolean equal          (Orderable o);
  public boolean greater        (Orderable o);
  public boolean greaterEqual (Orderable o);
  public boolean less           (Orderable o);
  public boolean lessEqual      (Orderable o);
  public Orderable minKey       ();
}
```

Sortierbasisklasse: `SortAlgorithm.java` bietet abzuleitende Klasse für die Sortieralgorithmen

```
class SortAlgorithm {
  static void swap(Object A[], int i, int j){
      Object o = A[i]; A[i] = A[j]; A[j] = o;
  }
  static void sort (Orderable A[]) {}
  static void printArray (Orderable A[]) {
    for (int i = 1; i < A.length; i++)
      System.out.print(A[i].toString()+" ");
    System.out.println();
  }
}
```

4 Auswahlsort



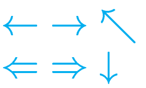
Idee: Bestimme der Reihe nach das i-kleinste Element im Rest der Liste ($1 \leq i \leq n$) und tausche es an die Position i

Implementation

```
 class AuswahlSort extends SortAlgorithm {
  static void sort (Orderable A[]) {
    for (int i = 1; i < A.length-1; i++) {
      int min = i;
      for (int j = i+1; j <= A.length-1; j++) {
        if (A[j].less(A[min])) {
          min = j;
        }
      }
      swap(A,i,min);
    }
  }
}
```

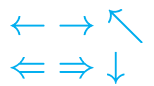
Analyse: Übungsaufgabe

5 Sortieren durch Einfügen



```
class EinfuegeSort extends SortAlgorithm {
  static void sort (Orderable A[]) {
    for (int i = 2; i < A.length; i++) {
      Orderable temp = A[i];
      int j = i - 1;
      while (j >= 1 && A[j].greater(temp)) {
        A[j+1] = A[j];
        j--;
      }
      A[j+1] = temp;
    }
  }
}
```

Analyse von Insertion Sort



Einfügen des i-ten Elementes benötigt mindestens 1, höchstens $i-1$ Vergleiche und mindestens 2, höchstens $i+1$ Bewegungen $(i = 2, \ldots, n)$

$$C_{min}(n) = n-1 \qquad C_{max} = \sum_{i=2}^{n}(i-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$M_{min}(n) = 2(n-1)$$

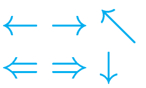
$$M_{max}(n) = \sum_{i=2}^{n}(i+1) = \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)$$

Im Mittel: Die Hälfte von $s_0, \ldots, s_{i-1}$ ist größer als s_i

$$C_{av}(n) \approx \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i+1}{2} = \Theta(n^2)$$

$$M_{av}(n) \approx \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i-1}{2} + 2 = \Theta(n^2)$$

6 Shellsort



Folge $1 = h_1 < h_2 < h_3 < \cdots < h_k$

1. Zu $h_i > 0$, $j = 0, \ldots, h_i - 1$, betrachte Teilfolgen

   $s_j, s_{j+h_i}, s_{j+2h_i}, \cdots$

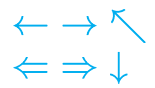
2. Sortiere jeder dieser Teilfolgen durch Einfügen

3. Falls $h_i > 1$, erniedrige h_i auf einen Wert h_{i-1} und gehe zu 1, sonst fertig;

Satz: Worst case Laufzeit: $O(n \log^2 n)$, falls $h_i \in \{2^p 3^q < N\}$

Satz: (Li and Vitányi 1999): Average case für alle Sequenzen (k pass) in $\Omega(kn^{1+1/k})$.

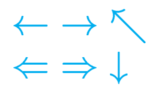
Beispiel zu Shellsort



$h_3 = 5$, $h_2 = 3$, $h_1 = 1$

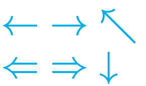
Eingabefolge:	15	2	43	17	4	8	47
$h_3 = 5$	15	2	43	17	4	8	47
	8	2	43	17	4	15	47
$h_2 = 3$	8	2	43	17	4	15	47
	8	2	15	17	4	43	47
$h_1 = 1$	8	2	15	17	4	43	47
	2	4	8	15	17	43	47

Implementation: Shellsort



```
class ShellSort extends SortAlgorithm {

  /* Sortierverfahren nach D.L. Shell */

  static void sort (Orderable A[]) {
    int n = A.length - 1;
    int h = n / 2;

    while (h > 1) {
      for (int j = 1; j <= h; j++) {
        sort (A, h, j);
      }
      h = h / 2;
    }
    sort(A, 1, 1);
  }

  static void sort (Orderable A[],int h,int k) {
    for (int i = k + h; i < A.length; i = i + h) {
      Orderable temp = A[i];
      int j = i - h;
      while (j >= 1 && temp < A[j]) {
        A[j+h] = A[j];
        j = j - h;
      }
      A[j+h] = temp;
    }
  }
}
```

7 Mergesort



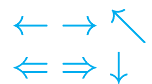
Mergesort—Sortieren durch Verschmelzen

Prinzip von Mergesort

Sortieren durch rekursives Verschmelzen von sortierten Teilfolgen

```
Eingabe: unsortierte Folge L
Ausgabe: sortierte Folge

if |L| = 1
  return L
L1 = erste Haelfte von L
L2 = zweite Haelfte von L
Mergesort(L1); Mergesort(L2)
return Merge(L1,L2)
```

Verschmelzen zweier Teilfolgen



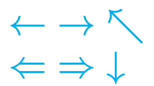
Merge Verschmelze die sortierten Folgen A[l..m] und A[m+1..r] zu einer Folge

```
static void merge(Orderable A[],int l,int m,int r) {
  comparable B [] = new Orderable[A.length];
  int i = l;          // Zeiger in A[l],...,A[m]
  int j = m + 1;      // Zeiger in A[m+1],...,A[r]
  int k = l;          // Zeiger in B[l],...,B[r]
  while (i <= m && j <= r) {
    if (A[i].less(A[j])) {
      B[k] = A[i]; i++;
    }
    else {
      B[k] = A[j]; j++;
    }
    k++;
  }
  if (i > m) { // erste Teilfolge erschoepft
    for (int h = j; h <= r; h++, k++) B[k] = A[h];
  }
  else {       // zweite Teilfolge erschoepft
    for (int h = i; h <= m; h++, k++) B[k] = A[h];
  }
  for (int h = l; h <= r; h++)  A[h] = B[h];
}
```

Beispiel:

2 4 8 15 17 25 43 47 62

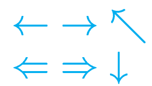
9 12 15 16 28 33 37



```
class mergeSort {
 /* sortiert das ganze Array */
 public static void sort (Orderable A[]){
   sort(A,1,A.length-1);
 }
 static void merge ...
 static void sort (Orderable A[], int l, int r){
   if (r > l) {
     int m = (l + r) / 2;
     sort(A, l, m);
     sort(A, m+1, r);
     merge(A, l, m, r);
   }
 }
}
```

Beispiel:	8	6	7	3	4	5	2	1
divide	8	6	7	3 |	4	5	2	1
divide	8	6 |	7	3 |	4	5 |	2	1
divide	8 |	6 |	7 |	3 |	4 |	5 |	2 |	1
merge								

Analyse von Mergesort



Schlüsselvergleiche für Merge:

worst-case: $n_1 + n_2 - 1$

best-case: $\min(n_1, n_2)$

$n_2 = r - m + 1 =$
$n_1 = m - l =$ Länge der linken Teilfolge
$n_2 = r - m + 1 =$ Länge der rechten Teilfolge

Rekursionsgleichung für Laufzeit von Mergesort

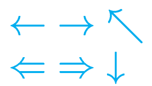
$$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$$

$O(n) = n/2 + n/2 - 1$ worst case
$n/2$ best case

$\Rightarrow T(n) = n \log n - (n-1)$

zusätzlicher Speicher: $O(n)$

Reines 2-Wege-Mergesort



Ansatz:

for $i = 0$ to $\log n$
verschmelze Teilfolgen der Länge 2^i

8	6	9	3	4	7	2	1
6	8	3	9	4	7	1	2
3	6	8	9	1	2	4	7
1	2	3	4	6	7	8	9

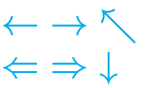
Natürliches 2-Wege-Mergesort

Ansatz: Wie reines Mergesort mit Ausnutzung vorsortierter Teilfolgen

8	6	9	3	4	7	2	1
6	8	9	2	3	4	7	1
2	3	4	6	7	8	9	1
1	2	3	4	6	7	8	9

$$C_{min} = n - 1 \qquad C_{av}, C_{max} = O(n \log n)$$

8 Quicksort

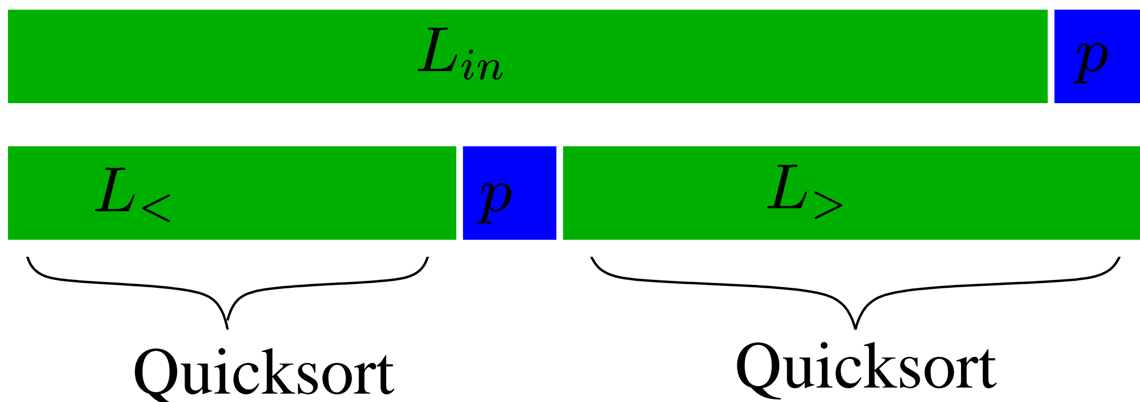


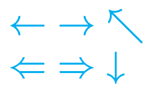
Sortieren durch Teilen

- Divide-&-Conquer Prinzip
- Sehr gute Laufzeit im Mittel, schlechte Laufzeit im worst case.

Quicksort Eingabe: unsortierte Liste L
sortierte Liste

```
if (|L| <= 1)
 return L
else waehle Pivotelement p aus L
  L< = {a in L | a < p}
  L> = {a in L | a > p}
  return
    [Quicksort(L<)] + [p] + [Quicksort(L>)]
```

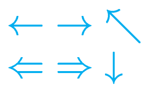




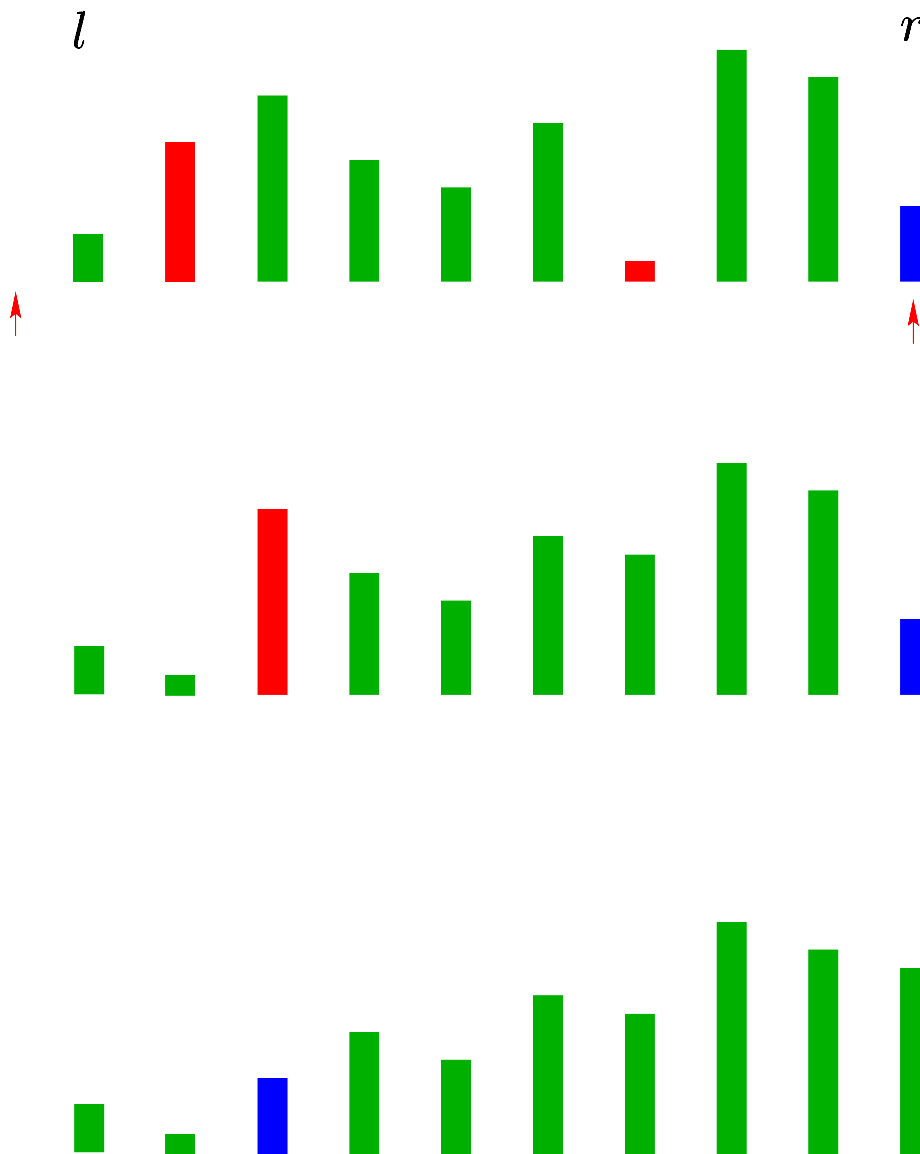
Eingliederung in das Rahmenprogramm:

```
class QuickSort extends SortAlgorithm {

  static void sort (Orderable A[]){
    /* sortiert das ganze Array */
    sort (A, 1, A.length-1);
  }


  static void sort (Orderable A[], int l, int r){
    /* sortiert das Array zwischen Grenzen l und r */
    if (r > l) {     // mind. 2 Elemente in A[l..r]
      int i = divide(A, l, r);
      sort (A, l, i-1);
      sort (A, i+1, r);
    }
  }
  static int divide (Orderable A [], int l, int r) {
    /* teilt das Array zwischen l und r mit Hilfe
       des Pivot-Elements in zwei Teile auf und gibt
       die Position des Pivot-Elementes zurueck */
    ...
  }
}
```

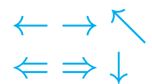
Der Aufteilungsschritt



divide(A, l, r):
- liefert den Index des Pivotelements in A
- ausführbar in Zeit $O(r - l)$

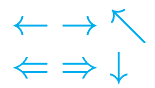


Implementation: Aufteilungsschritt

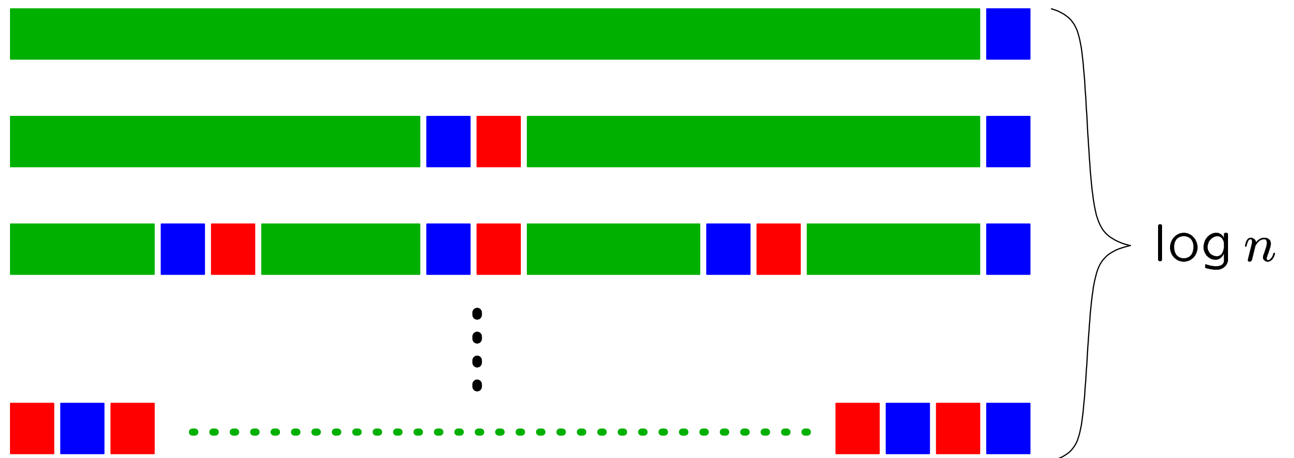


```
static int divide (Orderable A [], int l, int r) {

  // teilt das Array zwischen l und r mit Hilfe
  // des Pivot-Elements in zwei Teile auf und gibt
  // die Position des Pivot-Elementes zurueck

  int i = l-1;            // linker  Zeiger auf Array
  int j = r;              // rechter Zeiger auf Array

  Orderable pivot = A [r]; // das Pivot-Element

  while (true){              // "Endlos"-Schleife
    do i++; while (i < j && A[i].less(pivot));
    do j--; while (i < j && A[j].greater(pivot));
    if (i >= j) {
      swap (A, i, r);
      return i;         // Abbruch der Schleife
    }
    swap (A, i, j);
  }
}
```

Analyse von Quicksort

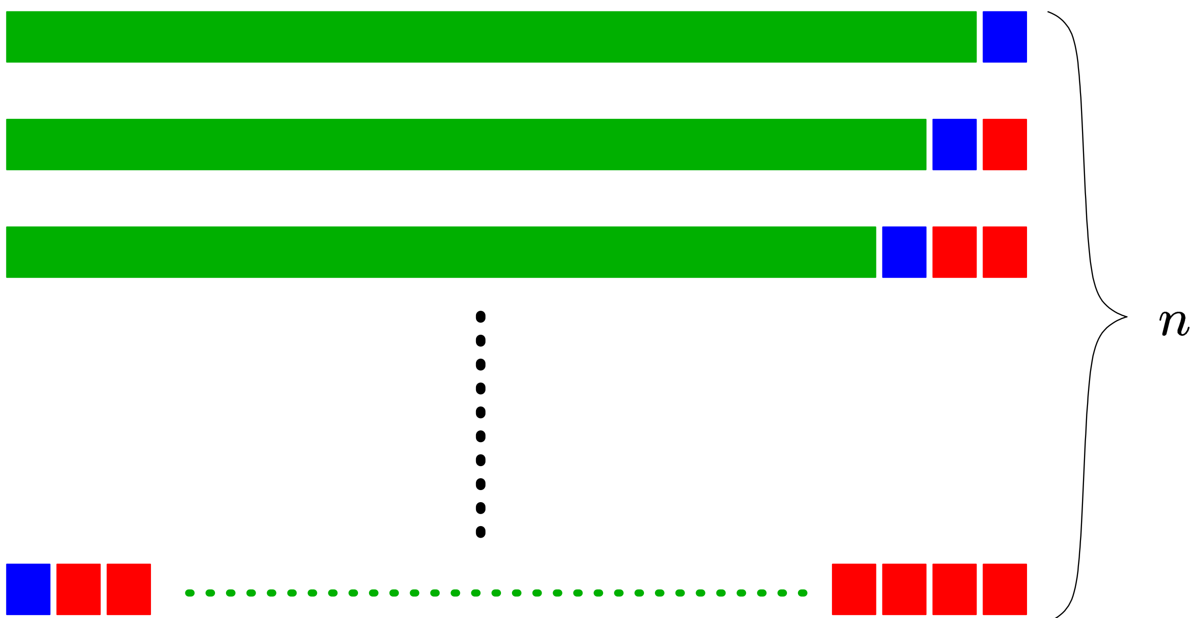


Günstigster Fall:



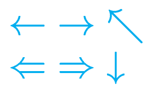
$T_{min}(n) = O(n \log n)$

Schlechtester Fall:



$T_{max}(n) = O(n^2)$

Best und Worst Case Quicksort



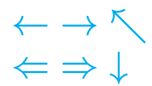
Best Case: Pivotelement teilt Folge jeweils genau zur Hälfte auf
Aufteilungsaufwand für Folge der Länge n: $n-1$
$T_{min}(n) =$ Schüsselvergleiche von Quicksort im besten Fall (C_{min})

$$\begin{aligned} T_{min}(1) &= 0 \\ T_{min}(n) &\leq 2T_{min}(n/2) + n - 1 \\ \Rightarrow T_{min}(n) &\leq n \log n - (n-1) \end{aligned}$$

Worst Case: Eine der beiden durch Aufteilung entstehenden Folgen ist leer
(z.B. aufsteigend sortierte Folge von Schlüsseln)
$T_{max}(n) =$ Schüsselvergleiche von Quicksort im schlechtesten Fall (C_{max})

$$\begin{aligned} T_{max}(1) &= 0 \\ T_{max}(n) &= T_{max}(n-1) + n - 1 \\ \Rightarrow T_{max}(n) &= T_{max}(n-2) + (n-2) + n - 1 \\ &\vdots \\ &= T(1) + \cdot 1 + \cdots + (n-2) + (n-1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2) \end{aligned}$$

Average Case Analyse Quicksort



Anahmen:

- n paarweise verschiedene Schlüssel
- Alle $n!$ Permutationen gleichwahrscheinlich

Fakt:

Teilfolgen des Aufteilungsschritts wieder zufällig
$\Rightarrow P$(Pivotelement hat Rang k) = $1/n$.

Rekursionsgleichung:

$$\begin{aligned} C_{av}(0) &= 0 \\ C_{av}(1) &= 0 \\ C_{av}(n) &= n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (C_{av}(k-1) + C_{av}(n-k)) \end{aligned}$$

Satz (Geschlossene Form)

$C_{av}(n) \approx 1.386 n \log n - 2.846 n + O(\log n)$

Beweis:

Exemplarisch lösen wir die Rekursionsgleichung, wobei wir C_{av} durch C abkürzen. Durch Multiplikation mit n

und Zusammenfassen der beiden Summanden (gleicher Indexbereich) gilt

$$nC(n) = n(n-1) + 2\sum_{i=1}^{n} C(i-1)$$

In dieser Gleichung kommen noch $C(0), \ldots, C(n)$ vor. Um die Zahl verschiedener Werte auf 2 zu senken, betrachten wir die oben gewonnene Gleichung auch für $n-1$ und subtrahieren diese Gleichung von der Gleichung für n.

$$(n-1)C(n-1) = (n-1)(n-2) + 2\sum_{i=1}^{n-1} C(i-1)$$

Demnach ist

$$nC(n) - (n-1)C(n-1) =$$

$$n(n-1) - (n-1)(n-2) + 2C(n-1)$$

Vereinfachung und Division durch $(n+1)n$ liefert

$$\frac{C(n)}{n+1} = \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

Es ist nun naheliegend, $Z(n) = C(n)/(n+1)$ zu untersuchen.

$$\begin{aligned}
Z(n) &= Z(n-1) + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} \\
&= Z(n-2) + \frac{2(n-2)}{(n-1)n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} = \dots \\
&= Z(1) + 2\sum_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i(i+1)}
\end{aligned}$$

Da $C(1) = 0$, ist $Z(1) = 0$. Es ist gut zu wissen, daß

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

gilt. Also ist

$$
\begin{aligned}
Z(n) &= 2\sum_{i=2}^{n}\frac{i-1}{i(i+1)}\\
&= 2\sum_{i=2}^{n}\frac{i-1}{i} - 2\sum_{i=3}^{n+1}\frac{i-2}{i}\\
&= 1 + 2\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{i} - 2\frac{n-1}{n+1}
\end{aligned}
$$

Die Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ tritt so häufig auf, daß sie einen Namen, nämlich Harmonische Reiche $H(n)$, erhalten hat. Es folgt

$$
Z(n) = 2H(n) - 2 - 2\frac{n-1}{n+1} = 2H(n) - 4 + \frac{4}{n+1}
$$

und

$$
\begin{aligned}
C(n) = (n{+}1)Z(n) &= 2(n{+}1)\left(H(n) - 2 + \frac{2}{n+1}\right)\\
&= 2(n+1)H(n) - 4n
\end{aligned}
$$

Was können wir über $H(n)$ aussagen? Aus der Betrachtung der Riemannschen Summen folgt

$$int_1^{n+1} \frac{1}{x} \leq H(n) \leq int_1^{n} \frac{1}{x}$$

und damit

$$\ln(n+1) \leq H(n) \leq 1 + \ln n$$

Ohne größere Probleme läßt sich sogar zeigen, daß $H(n) - \ln n$ konvergiert. Der Grenzwert γ heißt Eulersche Konstante, es gilt $\gamma \approx 0.57721\ldots$
Schließlich ist $\ln n = (\log n) \ln 2$. Insgesamt gilt also

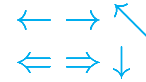
$$C(n) = 2(n+1)H(n) - 4n$$

$$\approx 1.386 n \log n - 2.846 n + O(\log n)$$

Gleiche Analyse wie Randomisiertes Quicksort

- Pivot = zufälliges Element aus $A[l..r]$
- vertausche $A[r]$ mit Pivot
- weiter wie bisher

Worst-case: Laufzeit jetzt zufällig $C_{ex}(n)$



Überblick, 2

Allgemeine Sortierverfahren, 4
Analyse von Insertion Sort, 10
Analyse von Mergesort, 17
Analyse von Quicksort, 23
Auswahlsort, 8
Average Case Analyse Quicksort, 25

Beispiel zu Shellsort, 12
Best und Worst Case Quicksort, 24

Das Sortierproblem, 3
Der Aufteilungsschritt, 21

Elementare Sortierverfahren, 5

Grundlegende Implementation, 6

Implementation, 20
Implementation: Aufteilungsschritt, 22
Implementation: Shellsort, 13

Mergesort, 14, 16

Quicksort, 19

Reines 2-Wege-Mergesort, 18

Shellsort, 11

Verschmelzen zweier Teilfolgen, 15