

Testfragen zur Vorlesung  
**Informatik III**  
 Wintersemester 2008/2009

**Aufgabe 1**

Ist folgende Sprache kontextfrei?

$$L = \{a^k b^{2n} c^{n+k} \mid k, n \in \mathbb{N}\}$$

**Lösung:** Ja. Die Sprache wird zum Beispiel durch die folgende Grammatik erzeugt (es wird nur die Menge der Produktionsregeln angegeben):

$$P = \{S \rightarrow aSc \mid abbTcc, T \rightarrow bbTc \mid \epsilon\}$$

Die Regeln genügen der Definition einer kontextfreien Grammatik. Es lässt sich leicht zeigen, dass die von der Grammatik erzeugte Sprache gleich  $L$  ist (je nachdem wie viele Punkte es für eine solche Aufgabe in der Klausur gibt, sollte das auch gezeigt werden).

**Aufgabe 2**

Definiere die Mengen  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{NP}$ .

$\mathcal{P}$  : Die Menge der Probleme, die durch eine **deterministische** Turingmaschine in **polynomieller Zeit** entschieden werden.

$\mathcal{NP}$ : Die Menge der Probleme, die durch eine **nicht-deterministische** Turingmaschine in **polynomieller Zeit** entschieden werden.

**Aufgabe 3**

Die Menge  $A$  ist rekursiv aufzählbar. Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

1. Jede Teilmenge  $C$  von  $A$  ist rekursiv aufzählbar.
2. Jede endliche Teilmenge  $C$  von  $A$  ist rekursiv aufzählbar.

**Lösung:**

1. Die Aussage gilt nicht. Gegenbeispiel  $A = \Sigma^*$ ,  $C = \overline{H}$ .  
 $\Sigma^*$  ist rekursiv, das Komplement des Halteproblems nicht.
2. Jede endliche Menge ist rekursiv, daher gilt die Aussage.

**Aufgabe 4**

Welcher der folgenden Mengen ist rekursiv? Begründen deine Aussage.

1.  $\{\langle M \rangle \mid \text{Es gibt mindestens eine Eingabe, für die } \langle M \rangle \text{ hält}\}$
2.  $\{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert Eingabe } \langle M \rangle\}$
3.  $\{\langle M \rangle \mid M \text{ entscheidet das Halteproblem}\}$
4.  $\{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \text{ enthält die Zeichenketten } 01011 \text{ und } 11001\}$

**Lösung:**

- 1.
2. Das ist das sog. „spezielle Halteproblem“. Es lässt sich per Widerspruchsbeweis mit dem Halteproblem zeigen, dass auch das spezielle Halteproblem unentscheidbar ist.
3. Wir wissen, dass es keine Turingmaschine gibt, die das Halteproblem entscheidet. Folglich ist diese Sprache leer und damit entscheidbar.
4. Dies lässt sich mit einem einfachen DFA überprüfen. Die Sprache ist rekursiv.

**Aufgabe 5**

Zeige, dass aus  $A \leq_p B$  und  $B \leq_p C$  folgt, dass  $A \leq_p C$ .

**Lösung:**  $A \leq_p B$  bedeutet, dass es eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion  $f_1$  gibt, sodass gilt  $\omega \in A \Leftrightarrow f_1(\omega) \in B$ .

$f_1$  reduziert  $A$  auf  $B$ , genau so gibt es auch eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion  $f_2$ , die  $B$  auf  $C$  reduziert.

Durch Hintereinanderausführen der Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  lässt sich also auch  $A$  auf  $C$  reduzieren:

$$\omega \in A \Leftrightarrow f_2(f_1(\omega)) \in C$$

. Die Aussage gilt, da  $f_2(f_1(\omega))$  auch in polynomieller Zeit berechnet werden kann.

**Aufgabe 6**

Beweise oder widerlege, dass die folgende Sprache entscheidbar ist.

$$L = \{\langle M, \omega \rangle \mid M \text{ hält auf Eingabe } \omega \text{ nicht innerhalb von } |\omega|^{30} \text{ Schritten}\}$$

**Lösung:** Die Sprache ist entscheidbar.  $|\omega|^{30}$  Schritte können in polynomieller Zeit berechnet (durchgeführt) werden. Dann ist entschieden, ob  $M$  hält oder noch weiter läuft - egal wie lange.

**Aufgabe 7**

Beweise folgende Aussagen.

1.  $\text{TSP} \leq_p \text{A}_{TM}$
2.  $\text{A}_{TM} \leq_p \text{H}_{TM}$
3.  $\text{A}_{CFG} \leq \text{H}_{TM}$

**Lösung:**

1. Sei  $M$  die Turingmaschine, die das Traveling-Salesman-Problem entscheidet (Zeit spielt keine Rolle). Die Ausgabe der Reduktionsfunktion  $f$  ist  $\langle M, G, k \rangle$ , wobei  $G$  und  $k$  die Eingaben für das TSP sind. Sie erfüllt die Bedingung  $\langle G, k \rangle \in \text{TSP} \Leftrightarrow f(\langle G, k \rangle) \in A_{TM}$ .
2. Das Wortproblem der Turingmaschinen lässt sich mit der Identität polynomiell auf das Halteproblem der Turingmaschinen reduzieren. Wenn es eine Eingabe  $\langle M, \omega \rangle$  gibt, für die die Turingmaschine  $M$  die Eingabe  $\omega$  akzeptiert, dann hält  $M$  auch auf  $\omega$ .
3. Das Wortproblem der kontextfreien Sprachen lässt sich polynomiell auf das Halteproblem der Turingmaschinen reduzieren. Das Argument ist fast dasselbe wie eben, nur muss statt der Identität eine Reduktionsfunktion gewählt werden, die aus dem Kellerautomaten aus der Eingabe eine Turingmaschine konstruiert, die den eingegebenen Kellerautomaten simuliert.

**Aufgabe 8**

Seien  $L, L'$  zwei Sprachen mit  $L' \subseteq L$ .

1. Ist  $L$  immer entscheidbar, wenn  $L'$  entscheidbar ist?
2. Ist  $L'$  immer entscheidbar, wenn  $L$  entscheidbar ist?

Begründe deine Antwort.

**Lösung:**

1. Nein. Gegenbeispiel  $L' = \{00, 11\}$ ,  $L = L \cup H$ .
2. Nein. Gegenbeispiel  $L = \Sigma^*$ ,  $L' = H$ .