

Aufgabe:

Beweisen Sie, dass das TRAVELING SALESMAN PROBLEM (TSP) \mathcal{NP} -vollständig ist. Sie dürfen annehmen, dass bereits die \mathcal{NP} -Vollständigkeit von HAMILTONIAN CIRCUIT (HC) bewiesen sei.

Zur Erinnerung:

TSP: Gibt es zu einem gegebenen ungerichteten, gewichteten, vollständigen Graphen $G = (V, E)$ und einer Zahl k eine Rundreise in dem Graphen, die jeden Knoten genau einmal besucht und höchsten Kosten k hat?

HC: Gibt es in einem gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ einen Kreis, der jeden Knoten genau einmal berührt?

Lösung:

Um die \mathcal{NP} -Vollständigkeit von TSP zu zeigen, muss dessen Zugehörigkeit zur Komplexitätsklasse \mathcal{NP} und dessen \mathcal{NP} -Schwierigkeit bewiesen werden.

- TSP $\in \mathcal{NP}$: Zu einem gegebenen vollständigen, ungerichteten Graphen und dessen Kantengewichtung sowie der Zahl k kann **nichtdeterministisch** eine Rundreise $i_1, i_2, \dots, i_{|V|}$ geraten werden, die jeden Knoten genau einmal besucht. Diese Rundreise kann **deterministisch in polynomieller Zeit** (abhängig von der Länge der Eingabe) daraufhin überprüft werden, ob sie eine gültige Instanz von TSP ist, das heißt ob

$$\sum_{j=1}^{|V|-1} C(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) \leq k$$

gilt, wobei $C(v_i, v_j)$ die Kostenfunktion ist, die das Gewicht der Kante von Knoten v_i zu v_j ausgibt. Diese Summe kann in Linearzeit berechnet werden. Damit gilt TSP $\in \mathcal{NP}$.

- TSP ist \mathcal{NP} -schwierig: Dazu nutzen wir das Wissen aus, dass HC \mathcal{NP} -vollständig ist, indem wir HC auf TSP reduzieren. Wir müssen also zeigen, dass HC \leq_p TSP gilt. Die Definition der Reduktion besagt, dass eine Eingabe für HC genau dann eine gültige Instanz davon ist, wenn diese Eingabe deterministisch in polynomieller Zeit so transformiert werden kann, dass daraus eine gültige Instanz für TSP wird. Formal heißt die Definition

$$G = (V, E) \in \text{HC} \Leftrightarrow f(G) \in \text{TSP}$$

und f soll in polynomieller Zeit deterministisch berechenbar sein.

Wir sehen, dass die Ausgabe von f eine gültige Eingabe für TSP sein muss, also ein vollständiger Graph $G' = (V', E')$ mit Kantengewichten C und eine Zahl k .

Nun konstruieren wir die einzelnen Elemente der Ausgabe von f :

- G' ist zunächst identisch zu G , enthält also die gleichen Knoten und Kanten.
- Jede bisher in G' vorhandene Kante wird mit 1 gewichtet.
- Alle bisher nicht in G' enthaltenen Kanten, also solche Kanten $(v_i, v_j) \notin E$, werden E' mit dem Gewicht $n + 1$ mit $n = |V|$ hinzugefügt. Damit ist G' ein vollständiger Graph.
- k wird gleich n gesetzt.

Nun ist f vollständig definiert. Es muss noch gezeigt werden, dass f tatsächlich eine korrekte Reduktionsfunktion ist.

Offensichtlich kann f in polynomieller Zeit und deterministisch die Ausgabe konstruieren. Wir prüfen noch, ob die Reduktionsbedingungen gelten:

„ \Rightarrow “ Wenn G einen Hamiltonkreis enthält, gibt es in ihm Kanten, sodass jeder Knoten genau einmal besucht werden kann. In G' sind diese Kanten mit Gewicht 1 enthalten. Es gibt also eine Rundreise entlang dieser Kanten, deren Kosten insgesamt $n \leq k$ ist.

„ \Leftarrow “ Enthält G keinen Hamiltonkreis, dann kann in G nicht jeder Knoten genau einmal besucht werden. G' ist zwar vollständig, für jede Rundreise, die jeden Knoten genau einmal besucht, muss aber mindestens eine Kante benutzt werden, die nicht in G enthalten ist. Jede solche Kante wurde in G' mit dem Gewicht $n + 1$ eingefügt. Damit kann es in G' keine Rundreise mit Kosten $\leq k$ geben.

Die Reduktionsfunktion f ist gültig. Damit ließe sich HC polynomiell durch TSP lösen. Nun wissen wir bereits, dass HC \mathcal{NP} -schwierig ist, also muss folgen, dass auch TSP \mathcal{NP} -schwierig ist, weil sonst $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ gelten würde.

Aus $\text{TSP} \in \mathcal{NP}$ und TSP ist \mathcal{NP} -schwierig folgt: TSP ist \mathcal{NP} -vollständig. □