

Parameterschätzung in Lévy-Zinsstrukturmodellen
auf der Basis von empirischen Korrelationen

Diplomarbeit
bei Prof. Dr. Ernst Eberlein
Institut für mathematische Stochastik
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Brsg.

vorgelegt von
Maximilian Beinhofer
April 2009

1 Einleitung

Die finanzmathematischen Modelle, mit denen Kursentwicklungen von festverzinslichen Wertpapieren beschrieben werden, sind im Laufe der Zeit immer wieder verändert und verbessert worden. In den traditionellen Modellen wird die Zinsstrukturkurve in Abhängigkeit von der Short-Rate modelliert. Modelle dieser Art sind zum Beispiel das in [24] eingeführte Vasiček-Modell aus dem Jahr 1977 und das Cox-Ingersoll-Ross-Modell von 1985 (siehe dazu [5]). Diese Modelle haben den Nachteil, dass die (empirisch beobachtbaren) Startwerte für die Bondpreise vom Modell nicht exakt wiedergegeben werden können. Siehe dazu Brigo und Mercurio [3].

1992 führten D. Heath, R.A. Jarrow und A. Morton in [17] ein Modell ein, bei dem dieses Problem nicht auftritt, im Weiteren als HJM-Modell bezeichnet. Im HJM-Modell wird die Zinsstrukturkurve in Abhängigkeit von den Forward-Raten modelliert. Wie bei vielen anderen finanzmathematischen Anwendungen wird als treibender Prozess eine Brownsche Bewegung verwendet. Da sie nur von zwei Parametern abhängen, sind Brownsche Bewegungen (mit Drift) einfach in der Handhabung aber auch relativ starr.

Ein flexibleres Modell entwickelten E. Eberlein und S. Raible in [16] 1999. Im sogenannten Lévy-Forward-Rate-Modell wird der treibende Prozess allgemein als Lévy-Prozess gewählt. Mit der Brownschen Bewegung als treibendem Lévy-Prozess ergibt sich das HJM-Modell als Spezialfall des Lévy-Forward-Rate-Modells. Die Möglichkeit, auch andere Lévy-Prozesse zu verwenden, macht das Lévy-Forward-Rate-Modell jedoch deutlich flexibler.

2007 wurde von E. Eberlein und A. Janssen in [10] eine explizite Formel bestimmt, welche die Korrelationen zwischen Bondpreisen im Lévy-Forward-Rate-Modell angibt. Diese Formel werden wir im Weiteren benutzen, um die Parameter des Lévy-Prozesses im Lévy-Forward-Rate-Modell anhand empirischer Korrelationen zu schätzen.

Homogene und inhomogene Lévy-Prozesse werden in Kapitel 2 näher erläutert. In Kapitel 3 wird das Lévy-Forward-Rate-Modell vorgestellt. Als treibende Prozesse für dieses Modell können homogene und inhomogene Lévy-Prozesse fungieren. Im Weiteren sind mit der Bezeichnung *Lévy-Prozess* stets homogene Lévy-Prozesse gemeint.

In Kapitel 4 werden die im Modell verwendeten Volatilitätsstrukturen dargestellt und es wird die Klasse von Verteilungen beschrieben, die wir verwenden, um Lévy-Prozesse zu erzeugen. Diese sogenannten verallgemeinerten hyperbolischen Verteilungen werden durch fünf Parameter bestimmt, die aus empirischen Bondpreiskorrelationen geschätzt werden können.

Ein Verfahren, mit dem die Parameter aus empirischen Korrelationen zwischen historischen Bondpreisen geschätzt werden, wird in Kapitel 5 eingeführt. Zudem wird in diesem Kapitel eine Methode erläutert, mit der die Parameter über Log>Returns geschätzt werden können.

Kapitel 6 enthält Details zum Datensatz, den wir bei der Implementierung verwenden. In Kapitel 7 werden die Ergebnisse der Schätzungen präsentiert.

Die Log-Return-Methode wird benutzt, um Vergleichswerte für die Ergebnisse der Schätzung über die Korrelationen zu erzeugen. Es zeigt sich zum einen, dass das HJM-Modell nicht flexibel genug ist, um Korrelationen zwischen Bondpreisen realistisch wiederzugeben. Zum anderen ergibt sich, dass über Korrelationen eingestellte Modelle realistische Korrelationen aber unrealistische Zuwachsdichten für den treibenden Prozess liefern. Über Log>Returns eingestellte Modelle dagegen erzeugen realistische Dichten, aber unrealistische Bondpreiskorrelationen.

Danksagung

Ich danke Prof. Dr. Ernst Eberlein für die kompetente und motivierende Betreuung. Für die anregenden Diskussionen danke ich Timo Vollmer und Ernst August von Hammerstein, der bei Fragen zur Implementierung immer Rat wusste. Außerdem danke ich Dr. Katharina Hauer für ihre Unterstützung in allen Lebenslagen und meinen Eltern für die Ermöglichung meines Studiums. Der Deutschen Bundesbank, insbesondere Dr. Sandra Haasis und Daniel Kaiser, danke ich für die Bereitstellung des Datensatzes.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Lévy-Prozesse	7
3	Lévy-Zinsstrukturmodelle	11
3.1	Das Lévy-Forward-Rate-Modell unter dem physikalischen Maß	11
3.2	Das Lévy-Forward-Rate-Modell unter dem risikoneutralen Maß	12
3.3	Weitere Lévy-Zinsstrukturmodelle	13
4	Annahmen über Verteilung und Volatilität	15
4.1	Verallgemeinerte hyperbolische Verteilungen	15
4.2	Volatilitätsstrukturen	16
5	Parameterschätzung	19
5.1	Schätzung der Korrelationen	19
5.2	Schätzung der Parameter aus Korrelationen	23
5.3	Schätzung der Parameter aus Log>Returns	26
5.4	Kombination der Schätzmethoden	28
6	Datensatz und Svensson-Methode	31
7	Ergebnisse	33
7.1	Empirische Resultate	33
7.2	Simulationen	37
8	Zusammenfassung	41
A	Details zur Implementierung	43

2 Lévy-Prozesse

Lévy-Zinsstrukturmodelle, wie sie in Kapitel 3 beschrieben sind, werden stets von Lévy-Prozessen oder inhomogenen Lévy-Prozessen angetrieben. Lévy-Prozesse können wie folgt definiert werden: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine vollständige stochastische Basis, wobei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T^*]}$ den üblichen Bedingungen genüge. $T^* > 0$ sei ein endlicher Zeithorizont und $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{T^*}$.

Definition 1. *Ein eindimensionaler Lévy-Prozess L ist ein reeller stochastischer Prozess mit $L_0 = 0$ \mathbb{P} -fast sicher, der an \mathcal{F} adaptiert ist und folgende Eigenschaften erfüllt:*

L hat unabhängige Zuwächse, d.h. $L_t - L_s$ ist stochastisch unabhängig von \mathcal{F}_s für $s \leq t$,

L hat stationäre Zuwächse, d.h. $L_t - L_s$ ist verteilt wie L_{t-s} für $s \leq t$, und

L ist stochastisch stetig, d.h. $\forall \epsilon > 0$ gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}[|L_{t+h} - L_t| \geq \epsilon] = 0$.

Zur Definition von Lévy-Prozessen siehe auch Protter [21], Kapitel I.4. Jeder Lévy-Prozess L besitzt eine eindeutige càdlàg-Version, die selbst ein Lévy-Prozess ist (siehe [21], Theorem 30). Im Weiteren können wir deshalb stets annehmen, dass L càdlàg ist. Ein bekanntes Beispiel für Lévy-Prozesse ist die Brownsche Bewegung.

Um die Charakteristik von L analog zu Jacod und Shiryaev [18] einführen zu können, ist es nötig, dass jeder Lévy-Prozess ein Semimartingal ist. Dies folgt aus Theorem 40 in [21]. Aus der Unabhängigkeit und der Stationarität der Zuwächse folgt die unbegrenzte Teilbarkeit der Verteilung jedes Lévy-Prozesses. Umgekehrt gilt auch, dass man mit jeder unbegrenzt teilbaren Verteilung F einen Lévy-Prozess L erzeugen kann, indem man $L_1 \sim F$ setzt (siehe Cont und Tankov [4] Proposition 3.1). Auf diese Weise werden die im Weiteren betrachteten Lévy-Prozesse spezifiziert (siehe Kapitel 4.1).

Jede unbegrenzt teilbare Verteilung ist über die Lévy-Khinchine-Formel durch ein Tripel $(b(h), c, F)$ und eine zugehörige Abschneidefunktion h eindeutig festgelegt, wie in [4] beschrieben. Somit kann auch jeder Lévy-Prozess durch ein solches Tripel bezüglich einer Abschneidefunktion eindeutig (bis auf Versionen) charakterisiert werden. Die charakteristische Funktion des Lévy-Prozesses L zum Zeitpunkt t zum Tripel $(b(h), c, F)$ der zugrunde liegenden Verteilung hat die Gestalt (siehe [21], Theorem 43)

$$\mathbb{E}[e^{iuL_t}] = \exp \left(iutb(h) - \frac{1}{2}u^2tc + \int_{\mathbb{R}} t(e^{iux} - 1 - iuh(x))F(dx) \right). \quad (1)$$

Dabei sind $b(h) \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}_+$. F ist ein Maß auf \mathbb{R} , das $(x^2 \wedge 1)$ integriert und $F(\{0\}) = 0$ erfüllt. h wird in der Regel durch $h(x) = x\mathbb{1}_{\{|x| \leq a\}}$ für ein a aus \mathbb{R}_+ definiert. Verschiedene Werte von a können in Gleichung (1) durch eine entsprechende Anpassung von b ausgeglichen werden. Der kanonische Wert für a ist 1. Die Abschneidefunktion h wird für die Wohldefiniertheit des Integrals in Ausdruck (1) benötigt, da iux bezüglich F im Allgemeinen nicht integrierbar ist.

t geht in die charakteristische Funktion nur als linearer Vorfaktor von $b(h)$, c und F ein. Das Tripel $(tb(h), tc, tF)$ wird als *Charakteristik* von L_t bezüglich h bezeichnet. Charakteristiken $(B(h), C, \nu)$ sind für alle Semimartingale definiert (siehe Jacod und Shiriaev [18], Kapitel II, Definition 2.6). Dabei dürfen $B(h)$ und C allgemein stochastische Prozesse mit gewissen Eigenschaften und ν ein zufälliges Maß sein.

Um die in Abschnitt 5.2 benötigte Korrelationsformel aus Eberlein und Janssen [10] benutzen zu können, müssen wir noch eine Annahme über den treibenden Lévy-Prozess treffen.

Annahme (EM). *Es existieren Konstanten $M, \epsilon > 0$, sodass*

$$\int_{\{|x|>1\}} \exp(ux)F(dx) < \infty$$

für alle $u \in [-(1 + \epsilon)M, (1 + \epsilon)M]$.

Die im Weiteren betrachteten von verallgemeinerten hyperbolischen Verteilungen erzeugten Lévy-Prozesse erfüllen diese Annahme. Sie ist äquivalent zu $\mathbb{E}[e^{uL_t}] < \infty$ für u wie oben und $t \in [0, T^*]$. Beweise zu dieser Äquivalenz und den im Weiteren aufgeführten Folgerungen aus (EM) finden sich bei Kluge [20].

Aus Annahme (EM) folgt, dass $\mathbb{E}[L_t] < \infty$ für alle $t \in [0, T^*]$ und dass die Abschneidefunktion h durch die Identität ersetzt werden kann. Im Weiteren sei $b := b(id)$. Außerdem vereinfacht sich die kanonische Zerlegung von L (siehe [21], Theorem 42) zu

$$L_t = tb + \sqrt{c}W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(\mu - \nu)(ds, dx), \quad (2)$$

wobei W eine Standard Brownsche Bewegung und μ das Sprungmaß von L mit Kompensator $\nu(ds, dx) = F(dx)ds$ ist. Das Sprungmaß μ ist definiert durch

$$\mu(\omega; dt, dx) := \sum_{s>0} \mathbf{1}_{\{\Delta L_s \neq 0\}} \epsilon_{(s, \Delta L_s(\omega))}(dt, dx).$$

μ ist also ein Zufallsmaß, das auf all die Punkte (s, x) aus $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ eine Punktmasse legt, für die $L_s(\omega)$ einen Sprung der Höhe x macht. ν wird als Kompensator von μ bezeichnet, da $\nu(t, A) = \mathbb{E}[\mu(\cdot, [0, t] \times A)]$ (siehe dazu Eberlein [7]). Die Subtraktion von ν kompensiert also die erwarteten Sprunghöhen im Integral in Gleichung (2) und macht es somit zu einem Martingal. Darstellung (2) zeigt, dass man L_t in seine Drift, seinen stetigen Martingalanteil und seinen kompensierten Sprunganteil zerlegen kann. Daraus folgt

$$\mathbb{E}[L_t] = tb. \quad (3)$$

Außerdem ist L unter (EM) ein spezielles Semimartingal. Gleichung (2) gibt seine kanonische Darstellung an. Mit (EM) lässt sich auch die Kumulante θ ohne Abschneidefunktion für $u \in [-(1 + \epsilon)M, (1 + \epsilon)M]$ definieren als

$$\theta(u) := ub + \frac{1}{2}u^2c + \int_{\mathbb{R}} (e^{ux} - 1 - ux)F(dx). \quad (4)$$

θ enthält mit b, c und F alle Informationen über den zugehörigen Lévy-Prozess L und ist, wie in Kapitel 5.2 beschrieben, das Verbindungsstück zwischen den betrachteten Bondpreiskorrelationen und dem treibenden Lévy-Prozess.

Inhomogene Lévy-Prozesse sind eine Verallgemeinerung der Lévy-Prozesse. Sie werden auch PIIAC (processes with independent increments and absolutely continuous characteristics) genannt. Ihre Charakteristik darf t auf andere als nur auf lineare Weise einbeziehen. Sie hat die Form $(\int_0^t b_s ds, \int_0^t c_s ds, F^t)$. Dabei sind $b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ und $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ deterministische Funktionen. F^t ist definiert durch $F^t(dx) = \int_0^t F_s(dx) ds$. Dabei ist $s \mapsto F_s$ eine Abbildung von \mathbb{R}_+ in die Menge der Maße auf \mathbb{R} , die $(x^2 \wedge 1)$ integrieren und bezüglich derer $\{0\}$ eine Nullmenge ist. Anschaulich bedeutet das, dass sich die dem Prozess zugrunde liegende unbegrenzt teilbare Verteilung im Laufe der Zeit verändern darf. Auch die inhomogenen Lévy-Prozesse eignen sich als Treiber für das im nächsten Kapitel vorgestellte Lévy-Forward-Rate-Modell. In diesem Fall kann das Modell jedoch nicht über empirische Korrelationen kalibriert werden (siehe Kapitel 5.1). Deshalb werden inhomogene Lévy-Prozesse im Weiteren außer Acht gelassen.

3 Lévy-Zinsstrukturmodelle

Zinsstrukturmodelle werden in der Regel dazu verwendet, Preise von Derivaten zu bestimmen. Diese Preise ergeben sich als risikoneutrale Erwartung der diskontierten Auszahlung des Derivats. Für die Derivatpreisbestimmung muss den Modellen also ein risikoneutrales Maß zugrunde liegen (siehe Eberlein und Kluge [12], Abschnitt 3). Für die Berechnung des Value at Risk, einer Kenngröße für das einer Anleihe innewohnende reale Risiko, benötigt man allerdings ein Modell, dem das Wahrscheinlichkeitsmaß der realen Welt zugrunde liegt. Dieses Maß spiegelt die Realität möglichst genau wieder und wird im Weiteren als *physikalisches Maß* bezeichnet.

3.1 Das Lévy-Forward-Rate-Modell unter dem physikalischen Maß

Das Lévy-Forward-Rate-Modell wurde von E. Eberlein und S. Raible in [16] eingeführt und von E. Eberlein und F. Özkan in [13] weiterentwickelt. Wie auch im HJM-Modell aus [17], wird im Lévy-Forward-Rate-Modell die gesamte Zinsstrukturkurve ausgehend von den Forward-Raten modelliert. Die Verzinsung in diesem Modell wird immer als stetig angenommen. Somit hängt die Forward-Rate $f(t, T)$ mit dem Preis $B(t, T)$ einer Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt t mit Fälligkeit $T \in [t, T^*]$ und einem Auszahlungsbetrag von einer Einheit über

$$B(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u) du\right) \quad (5)$$

zusammen. Da dieser direkte Zusammenhang besteht, werden mit den Forward-Raten auch die Bondpreise modelliert.

Für beliebige $t, T \in [0, T^*]$ mit $t \leq T$ wird die Dynamik der Forward-Rate als

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds - \int_0^t \sigma(s, T) dL_s \quad (6)$$

angenommen, wobei die $f(0, T)$ die gegebenen Startwerte sind. α und σ sind Funktionen von $[0, T^*] \times [0, T^*]$ nach \mathbb{R} . Im Allgemeinen können sie auch als stochastische Prozesse gewählt werden (siehe [13]); in der Regel werden sie jedoch deterministisch angenommen. Im Weiteren seien α und σ deterministisch, beschränkt und es gelte $0 \leq \int_t^T \sigma(t, s) ds \leq \frac{M}{2}$ für alle $t \leq T \leq T^*$. M ist dabei die Konstante aus Annahme (EM). Diese Beschränkung wird in [10] für die Berechnung der Korrelationen zwischen Bondpreisen bei der Verwendung des dort aufgeführten Theorems 1 gebraucht.

In Gleichung (6) ist L der treibende Lévy-Prozess. Wie in Kapitel 2 erwähnt, könnte man L auch als inhomogenen Lévy-Prozess wählen. Für die Korrelationschätzung ist das allerdings nicht sinnvoll (siehe Kapitel 5.1). Wenn man in Gleichung (6) L als Brownsche Bewegung wählt, ergibt sich das HJM-Modell als Spezialfall des Lévy-Forward-Rate-Modells.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $\mathbb{E}[L_t] = 0$ für alle $t \geq 0$ annehmen. Dies ist mit folgendem Argument möglich: Sei L ein Lévy-Prozess mit $\mathbb{E}[L_t] \neq 0$. Dann definiere $\tilde{L}_t := L_t - tb$. Mit (3) gilt $\mathbb{E}[\tilde{L}_t] = 0$. Wenn man in Gleichung (6) zudem $\tilde{\alpha}(t, T) := \alpha(t, T) - b\sigma(t, T)$ anstelle von $\alpha(t, T)$ verwendet, ergeben sich für $f(t, T)$ dieselben Werte.

Seien nun $\Sigma(s, T) := \int_{s \wedge T}^T \sigma(s, u) du$ und $\Sigma(s, t, T) := \Sigma(s, T) - \Sigma(s, t)$. Analog seien $A(s, T) := \int_{s \wedge T}^T \alpha(s, u) du$ und $A(s, t, T) := A(s, T) - A(s, t)$. Mit dem Satz von Fubini ergibt sich aus Gleichungen (5) und (6)

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left(- \int_0^t A(s, t, T) ds + \int_0^t \Sigma(s, t, T) dL_s \right). \quad (7)$$

$B(0, t)$ und $B(0, T)$, die sich aus $f(0, \cdot)$ ergeben, können als gegeben und ungleich Null vorausgesetzt werden.

Eine Darstellung von $B(t, T)$ in Abhängigkeit von der Short-Rate $r(s) := f(s, s)$ ergibt sich über das Geldmarktkonto $B_t := \exp \left(\int_0^t r(s) ds \right)$. Analog zu (7) ist

$$B_t = \frac{1}{B(0, t)} \exp \left(\int_0^t A(s, t) ds - \int_0^t \Sigma(s, t) dL_s \right). \quad (8)$$

Einsetzen von (8) in (7) ergibt nun

$$B(t, T) = B(0, T) \exp \left(\int_0^t (r(s) - A(s, T)) ds + \int_0^t \Sigma(s, T) dL_s \right). \quad (9)$$

Im Weiteren wird ausschließlich Darstellung (7) verwendet. Für die in Abschnitt 5.1 beschriebene Schätzung muss an A noch die Stationaritätsbedingung

$$A(s, T) = A(0, T - s) \quad \forall s \leq T \quad (10)$$

gestellt werden. Diese Bedingung ist gängig. Sie wird zum Beispiel auch bei Eberlein und Kluge [11] gestellt.

Da dem Modell das physikalische Maß zugrunde gelegt wird, es also die reale Welt möglichst originalgetreu abbilden soll, lässt es sich über historische Bondpreise kalibrieren. So wird in Kapitel 5 vorgegangen.

3.2 Das Lévy-Forward-Rate-Modell unter dem risikoneutralen Maß

Da es im Weiteren nicht verwendet wird, wird das Lévy-Forward-Rate-Modell unter dem risikoneutralen Maß hier nur knapp geschildert. Genaueres dazu findet sich bei Kluge [20].

Alle Gleichungen aus Kapitel 3.1 gelten auch im risikoneutralen Fall. Zusätzlich wird dem Modell ein risikoneutrales Maß zugrunde gelegt. Genauer: In der zugrunde liegenden stochastischen Basis $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ wird das physikalische Maß \mathbb{P} durch ein äquivalentes risikoneutrales Maß \mathbb{Q} ersetzt. Ein Maß \mathbb{Q} wird als *risikoneutral* bezeichnet, wenn die diskontierten Preisprozesse $(B(t, T)/B_t)_{t \in [0, T]}$

für alle $T \in [0, T^*]$ \mathbb{Q} -Martingale sind. Das lässt sich erreichen, indem man A aus Darstellung (7) nicht wie im Fall mit dem physikalischen Maß als frei wählbar zulässt, sondern es über

$$A(s, T) := \theta(\Sigma(s, T)) \quad (11)$$

definiert. θ ist dabei die in Kapitel 2 definierte Kumulante von L . Mit Gleichung (11) sind die $(B(t, T)/B_t)_{t \in [0, T]}$ für alle $T \leq T^*$ Martingale, wie sich mit Theorem 1 aus [10] leicht zeigen lässt. Die Eindeutigkeit des so entstandenen risikoneutralen Maßes zeigen Eberlein, Jacod und Raible [9]. Unter (11) ist die Stationaritätsbedingung (10) für A äquivalent zur Stationarität von Σ . Die in den hier beschriebenen Modellen gängigen Volatilitätsstrukturen sind stationär, wie in Kapitel 4.2 beschrieben.

Zur Kalibrierung des Lévy-Forward-Rate-Modells unter dem risikoneutralen Maß eignen sich Wertpapiere, in deren Preisen implizit die Annahme enthalten ist, dass diskontierte Bondpreise Martingale sind. Derivate auf Bonds erfüllen diese Bedingung, während sie für die Bonds selbst nicht gilt. Da die Modellkalibrierung im Weiteren Korrelationen zwischen Bondpreisen zur Grundlage hat, lässt sich mit ihr das Modell unter dem risikoneutralen Maß nicht kalibrieren. Wenn man dem treibenden Lévy-Prozess allerdings eine verallgemeinerte hyperbolische Verteilung zugrunde legt, lassen sich aus den Verteilungsparametern des Modells unter dem physikalischen Maß gewisse Einschränkungen für die Parameter des Modells unter dem risikoneutralen Maß ableiten (siehe dazu Raible [22]).

3.3 Weitere Lévy-Zinsstrukturmodelle

Im oben beschriebenen Lévy-Forward-Rate-Modell werden die Forward-Raten als stochastische Prozesse modelliert. Andere Größen wie Bondpreise, Forward-Prozesse und LIBOR-Raten können dann in Abhängigkeit von den modellierten Forward-Raten angegeben werden. Für die Bondpreise geschieht das über Gleichung (5). Forward-Prozesse $F(\cdot, T_1, T_2)$ für $T_1 < T_2$ können über folgenden Zusammenhang berechnet werden:

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{B(t, T_1)}{B(t, T_2)} \quad (12)$$

(Forward-)LIBOR-Raten $L(t, T)$ für eine Laufzeit δ ab einem Startzeitpunkt T ergeben sich über:

$$L(t, T) = \frac{1}{\delta}(F(t, T, T + \delta) - 1) \quad (13)$$

Die direkte Modellierung der Forward-Prozesse oder der LIBOR-Raten mit inhomogenen Lévy-Prozessen als Treiber führt zu anderen Modellen. Diese werden Lévy-Forward-Process-Modell und Lévy-LIBOR-Modell genannt und werden zum Beispiel in Eberlein und Özkan [14] und Eberlein und Kluge [11] beschrieben.

Bei beiden Modellen wird zunächst eine diskrete Folge von Zeitpunkten $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N < T_{N+1} = T^*$ festgelegt. Die Laufzeiten δ_i der LIBOR-Raten $L(t, T_i)$ werden dabei für $0 \leq i \leq N$ definiert als $\delta_i := T_{i+1} - T_i$. Zu jedem Zeitpunkt T_i werden nun ein eigener inhomogener Lévy-Prozess L^{T_i} und ein eigenes Forward Maß \mathbb{P}_{T_i} konstruiert. Dies geschieht mittels Induktion von n nach $n - 1$ mit Induktionsanfang in T^* . Die Konstruktion erfolgt so, dass die Prozesse $F(\cdot, T_{i-1}, T_i)$ beziehungsweise $L(\cdot, T_{i-1})$ unter den zugehörigen Maß \mathbb{P}_{T_i} Martingale sind. Diese Bedingungen treffen auf dem realen Bondmarkt nicht zu. Somit werden die Modelle wie auch das im vorigen Kapitel beschriebene Lévy-Forward-Rate-Modell unter dem risikoneutralen Maß üblicherweise nur über Derivate kalibriert. Eine Kalibrierung über die Korrelationen zwischen Bondpreisen, wie sie im Weiteren beschrieben wird, ist für diese Modelle also nicht sinnvoll.

4 Annahmen über Verteilung und Volatilität

4.1 Verallgemeinerte hyperbolische Verteilungen

Verallgemeinerte hyperbolische Verteilungen, auch GH-Verteilungen genannt (von generalized hyperbolic), sind unbegrenzt teilbar (siehe dazu [2]). Somit erzeugt jede GH-Verteilung einen Lévy-Prozess. Die Elemente der Klasse der GH-Verteilungen werden durch die fünf Parameter $\alpha > 0$, $\beta \in (-\alpha, \alpha)$, $\delta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}$ eindeutig festgelegt. Die Lebesgue Dichte einer GH-Verteilung hat die Gestalt

$$d_{GH}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) \left(\delta^2 + (x - \mu)^2 \right)^{(\lambda - \frac{1}{2})/2} \\ \times K_{\lambda - \frac{1}{2}} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right) \exp(\beta(x - \mu)) \quad (14)$$

mit

$$a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} \delta^\lambda K_\lambda \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)}.$$

K_λ bezeichnet hierbei die modifizierte Besselfunktion dritter Art zum Index λ . Mit der Dichtetransformationsformel geht aus (14) hervor, dass für eine GH-verteilte Zufallsvariable X und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ die Zufallsvariable $Y := cX$ auch GH-verteilt ist. Genauer: Wenn $X \sim GH(\alpha, \beta, \delta, \lambda, \mu)$, dann ist $cX \sim GH(\frac{1}{c}\alpha, \frac{1}{c}\beta, c\delta, \lambda, c\mu)$.

Wie in Eberlein [6] beschrieben, ergibt sich für $|\beta + u| < \alpha$ die momenterzeugende Funktion einer GH-Verteilung als

$$M_{GH}(u) = e^{\mu u} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_\lambda \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right)}{K_\lambda \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)}. \quad (15)$$

Die charakteristische Funktion Φ_{GH} der Verteilung kann über den Zusammenhang

$$\Phi_{GH}(u) = M_{GH}(iu) \quad (16)$$

bestimmt werden. Aus dieser Gleichung folgt auch, dass für einen von einer GH-Verteilung erzeugten Lévy-Prozess L gilt: $M_{GH}(u) = \mathbb{E}[e^{uL_1}]$. Somit gilt Annahme (EM) aus Kapitel 2 mit Gleichung (15) für GH-Verteilungen. $(1+\epsilon)M$ aus (EM) muss nur kleiner als $\alpha - |\beta|$ gewählt werden. Außerdem folgt $\theta(u) = \log(M_{GH}(u))$ mit Gleichungen (1) und (4).

Aus Gleichung (15) lassen sich Momente und Kumulanten der Verteilung bestimmen. Für den Erwartungswert erhält man

$$\mathbb{E}[GH] = \mu + \frac{\beta \delta^2}{\zeta} \frac{K_{\lambda+1}(\zeta)}{K_\lambda(\zeta)}, \quad (17)$$

wobei $\zeta := \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ ist. Wenn der treibende Lévy-Prozess L nun, wie in Kapitel 3.1 beschrieben, mit $\mathbb{E}[L_t] = 0$ für alle $t \geq 0$ gewählt wird, ist μ durch die

anderen Parameter der den Prozess erzeugenden GH-Verteilung bereits eindeutig festgelegt. Gleichung (17) liefert dann

$$\mu = -\frac{\beta\delta^2}{\zeta} \frac{K_{\lambda+1}(\zeta)}{K_\lambda(\zeta)}. \quad (18)$$

Mit gleichem ζ ergibt sich die Varianz einer GH-verteilten Zufallsvariable aus (15) als

$$\text{Var}(GH) = \frac{\delta^2}{\zeta} \frac{K_{\lambda+1}(\zeta)}{K_\lambda(\zeta)} + \beta^2 \frac{\delta^4}{\zeta^2} \left(\frac{K_{\lambda+2}(\zeta)}{K_\lambda(\zeta)} - \frac{K_{\lambda+1}^2(\zeta)}{K_\lambda^2(\zeta)} \right). \quad (19)$$

Eine häufig verwendete Unterklasse der GH-Verteilungen ist die Klasse der Normal-Inverse-Gaussian-(NIG-)Verteilungen, für die der Parameter λ beim Wert $-\frac{1}{2}$ festgehalten wird. Die Besselfunktion $K_{-\frac{1}{2}}$ kann man in einem geschlossenen Ausdruck angeben, nämlich als $K_{-\frac{1}{2}}(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2u}} e^{-u}$ (siehe Abramowitz und Stegun [1] 10.2.16 und 10.2.17). Für NIG-Verteilungen vereinfacht sich damit die momenterzeugende Funktion zu

$$M_{NIG}(u) = \exp(\mu u) \frac{\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)}{\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2}\right)}. \quad (20)$$

Die Verteilung des treibenden Lévy-Prozesses bestimmt im Lévy-Forward-Rate-Modell die Korrelationen zwischen Bondpreisen über θ (siehe Kapitel 5.2). Da $\theta(u) = \log(M_{GH}(u))$ gilt, gehen die Verteilungsparameter in die Korrelationen über Gleichungen (15) und (20) ein. Für eine detailliertere Beschreibung der GH-Verteilungen siehe [6].

4.2 Volatilitätsstrukturen

Die zwei gängigsten Volatilitätsstrukturen im Lévy-Forward-Rate-Modell sind die Ho-Lee- und die Vasiček-Volatilitätsstruktur (siehe [10], [11], [16]). Bei Ho-Lee gilt für $s \leq T$

$$\Sigma(s, T) = \sigma_0(T - s). \quad (21)$$

Die Vasiček-Volatilitätsstruktur hat für $s \leq T$ die Form

$$\Sigma(s, T) = \frac{\sigma_0}{a} \left(1 - e^{-a(T-s)}\right) \quad (22)$$

mit dem zusätzlichen Parameter $a \neq 0$. Der Parameter σ_0 kann bei beiden Strukturen ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich 1 gesetzt werden, da man ihn in den Lévy-Prozess integrieren kann. Das sieht man wie folgt: Man betrachte eine der beiden Volatilitätsstrukturen Σ mit $\sigma_0 \neq 1$ und den zugehörigen Lévy-Prozess L mit $L_1 \sim GH(\alpha, \beta, \delta, \lambda, \mu)$. Seien nun $\tilde{\Sigma}(s, T) := \frac{1}{\sigma_0} \Sigma(s, T)$ und $\tilde{L} := \sigma_0 L$. Dann ist $\tilde{L} \sim GH(\frac{1}{\sigma_0}\alpha, \frac{1}{\sigma_0}\beta, \sigma_0\delta, \lambda, \sigma_0\mu)$, wie in Abschnitt 4.1 beschrieben. Zudem gilt für alle $t \leq T \leq T^*$

$$\int_0^t \tilde{\Sigma}(s, t, T) d\tilde{L}_s = \int_0^t \Sigma(s, t, T) dL_s.$$

Im Lévy-Forward-Rate-Modell unter dem physikalischen Maß erzeugen also (Σ, L) und $(\tilde{\Sigma}, \tilde{L})$ dieselben Bondpreise (siehe Gleichung (7)).

Wie in Eberlein und Raible [16] gezeigt wird, sind unter gewissen Voraussetzungen die Ho-Lee- und die Vasiček-Struktur die einzigen Volatilitätsstrukturen, mit denen im Lévy-Forward-Rate-Modell die Short-Rate r ein Markovprozess ist.

Aus (21) folgt für die Ho-Lee-Volatilitätsstruktur die Unabhängigkeit des Ausdrucks $\Sigma(s, t, T) = T - t$ von s . In diesem Fall lässt sich also das Integral in Gleichung (7) leicht lösen. Für die Vasiček-Volatilitätsstruktur gilt: $\Sigma(s, t, T) = \frac{e^{as}}{a}(e^{at} - e^{aT})$.

In beiden Fällen hängt der Wert der Volatilitätsstruktur Σ nur von der Differenz $(T - s)$ ab. Diese Eigenschaft wird als *Stationarität der Volatilitätsstruktur* bezeichnet (vergleiche Eberlein und Kluge [11]). Bei Ho-Lee und Vasiček ist $s \mapsto \Sigma(s, T) \in \mathcal{C}^2$ und $\Sigma' := \frac{d\Sigma}{ds}$ ebenfalls stationär. Dies wird später im Beweis zu Lemma 3 gebraucht. Für Satz 5 braucht man zudem, dass $\Sigma(\cdot, t_1, T_1) = C \Sigma(\cdot, t_2, T_2)$ für eine Konstante C , die nur von t_1, T_1, t_2 und T_2 abhängt. Auch diese Bedingung erfüllen die Ho-Lee- und die Vasiček-Volatilitätsstruktur.

5 Parameterschätzung

Um die Parameter des treibenden Prozesses aus historischen Bondpreisdaten zu schätzen, werden normalerweise die Logarithmen der Verhältnisse der Bondpreise zu ihren Forwardpreisen am vorigen Tag betrachtet. Diese werden als tägliche *Log>Returns* bezeichnet.

Mit den in Eberlein und Janssen [10] entwickelten Korrelationsformeln für Lévy Zinsstrukturmodelle lässt sich ein direkter Zusammenhang zwischen den Parametern des treibenden Prozesses und den Korrelationen zwischen zwei verschiedenen Bondpreisen angeben. Somit ist es auch möglich, die Parameter über die Korrelationen zwischen historischen Bondpreisen zu schätzen. Dies geschieht in zwei Schritten: Im ersten Schritt werden Korrelationen aus historischen Bondpreisen geschätzt. Im zweiten Schritt werden daraus die Parameter des treibenden Lévy-Prozesses geschätzt.

Die Methode zur Schätzung der Verteilungsparameter aus täglichen Log>Returns werden wir verwenden, um Vergleichswerte für die über Korrelationen geschätzten Parameter zu erzeugen.

Alle Aussagen in diesem Kapitel haben Gültigkeit im Lévy-Forward-Rate-Modell unter dem physikalischen Maß.

5.1 Schätzung der Korrelationen

Für feste t_1, T_1, t_2, T_2 mit $t_1 < T_1 \leq T^*$, $t_2 < T_2 \leq T^*$ und o.B.d.A. $t_1 < t_2$ soll der Korrelationskoeffizient $\text{Corr}(B(t_1, T_1), B(t_2, T_2))$ geschätzt werden. Als Schätzer für Corr wird wie üblich die empirische Korrelation $\hat{\text{Corr}}$ verwendet. Diese hat die Gestalt

$$\begin{aligned} & \hat{\text{Corr}}(B(t, T_1), B(t, T_2)) \\ &= \frac{\sum_{n=0}^N (B_n(t_1, T_1) - \bar{B}(t_1, T_1))(B_n(t_2, T_2) - \bar{B}(t_2, T_2))}{\sqrt{\sum_{n=0}^N (B_n(t_1, T_1) - \bar{B}(t_1, T_1))^2} \sqrt{\sum_{n=0}^N (B_n(t_2, T_2) - \bar{B}(t_2, T_2))^2}}. \end{aligned} \quad (23)$$

$B_1(t_1, T_1), \dots, B_N(t_1, T_1)$ sind dabei N unabhängige Samples der Zufallsvariable $B(t_1, T_1)$. $\bar{B}(t_1, T_1)$ ist das arithmetische Mittel von $B_1(t_1, T_1), \dots, B_N(t_1, T_1)$. $B_1(t_2, T_2), \dots, B_N(t_2, T_2)$ und $\bar{B}(t_2, T_2)$ sind analog definiert. Um Corr schätzen zu können, braucht man also zunächst möglichst viele Samples der Zufallsvariablen $B(t_1, T_1)$ und $B(t_2, T_2)$. In historischen Daten ist allerdings für beide Zufallsvariablen je nur ein Sample vorhanden, da man für alle T_1, T_2 je nur einen historischen Pfad der Prozesse $B(\cdot, T_1)$ und $B(\cdot, T_2)$ beobachten kann. Dieses Problem kann über folgenden Zusammenhang gelöst werden:

Definition und Satz 2. Für feste t, T, Δ mit $t < T$ und $\Delta \in [0, T^* - T]$ sei die Zufallsvariable $B^\Delta(t, T)$ definiert als

$$B^\Delta(t, T) := B(t + \Delta, T + \Delta) \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \frac{B(\Delta, t + \Delta)}{B(\Delta, T + \Delta)}. \quad (24)$$

$B^\Delta(t, T)$ hat dann die gleiche Verteilung wie $B(t, T)$. Des Weiteren ist $B^\Delta(t, T)$ für $\Delta \geq t$ stochastisch unabhängig von $B(t, T)$.

Zum Beweis des Satzes wird noch das folgende Lemma benötigt.

Lemma 3. Für $Y_s^\Delta := L_{s+\Delta} - L_\Delta$ sind Y_s^Δ und L_s identisch verteilt. Für $\Delta \geq s$ ist Y_s^Δ stochastisch unabhängig von L_s . Für festes $t \leq T \leq T^*$ gilt

$$\int_\Delta^{t+\Delta} \Sigma(s, t + \Delta, T + \Delta) dL_s = \int_0^t \Sigma(s, t, T) dY_s^\Delta. \quad (25)$$

Beweis. Laut Definition 1 (Lévy-Prozesse) besitzt Y_s^Δ die gleiche Verteilung wie L_s und ist stochastisch unabhängig von \mathcal{F}_Δ . Für $s \leq \Delta$ ist Y_s^Δ somit auch stochastisch unabhängig von L_s .

Die Integralgleichheit wird mit Itô's Formel (siehe Jacod und Shiryaev [18], Kapitel I, Theorem 4.57) gezeigt. Wir wenden diese Formel auf $X_s := (L_s, s)$ und $f(x, s) := x \Sigma(s, t + \Delta, T + \Delta)$ an. $\Sigma' = \frac{d\Sigma}{ds}$ nehmen wir dabei als stationär an, wie in Kapitel 4.2 erwähnt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} L_u \Sigma(u, t + \Delta, T + \Delta) &= L_0 \Sigma(0, t + \Delta, T + \Delta) \\ &+ \int_0^u L_{s-} \Sigma'(s-, t + \Delta, T + \Delta) ds + \int_0^u \Sigma(s-, t + \Delta, T + \Delta) dL_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^u 0 d\langle L_s^c \rangle + \frac{1}{2} \int_0^u L_{s-} \Sigma''(s-, t + \Delta, T + \Delta) d\langle s^c \rangle \\ &+ \int_0^u \Sigma'(s-, t + \Delta, T + \Delta) d\langle L_s^c, s^c \rangle \\ &+ \sum_{s \leq t} (L_s \Sigma(s, t + \Delta, T + \Delta) - L_{s-} \Sigma(s-, t + \Delta, T + \Delta) \\ &\quad - \Sigma(s-, t + \Delta, T + \Delta) \Delta L_s - L_{s-} \Sigma'(s-, t + \Delta, T + \Delta) \Delta s) \end{aligned}$$

für beliebiges $u \leq T^*$. Der stetige Martingalanteil einer deterministischen Funktion ist konstant Null, also gilt $s^c = 0$. Zudem ist $s- = s$, also $\Delta s = 0$. $L_0 = 0$, das Lebesguemaß hat keine Punktmassen und Σ ist stetig. Somit folgt

$$L_u \Sigma(u, t + \Delta, T + \Delta) = \int_0^u L_s \Sigma'(s, t + \Delta, T + \Delta) ds + \int_0^u \Sigma(s, t + \Delta, T + \Delta) dL_s. \quad (26)$$

Wenn man (26) mit $u := \Delta$ von (26) mit $u := t + \Delta$ abzieht, ergibt sich

$$\begin{aligned} L_{t+\Delta} \Sigma(t + \Delta, t + \Delta, T + \Delta) - L_\Delta \Sigma(\Delta, t + \Delta, T + \Delta) \\ = \int_\Delta^{t+\Delta} L_s \Sigma'(s, t + \Delta, T + \Delta) ds + \int_\Delta^{t+\Delta} \Sigma(s, t + \Delta, T + \Delta) dL_s. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit der Stationarität von Σ und Σ' und mit Substitution im Lebesgueintegral

$$\begin{aligned}
& \int_{\Delta}^{t+\Delta} \Sigma(s, t + \Delta, T + \Delta) dL_s \\
&= L_{t+\Delta} \Sigma(t, t, T) - L_{\Delta} \Sigma(0, t, T) - \int_{\Delta}^{t+\Delta} L_s \Sigma'(s, t + \Delta, T + \Delta) ds \\
&= L_{t+\Delta} \Sigma(t, t, T) - L_{\Delta} \Sigma(0, t, T) - \int_0^t L_{z+\Delta} \Sigma'(z, t, T) dz \\
&= (L_{t+\Delta} - L_{\Delta}) \Sigma(t, t, T) + L_{\Delta} (\Sigma(t, t, T) - \Sigma(0, t, T)) \\
&\quad - \int_0^t L_{z+\Delta} \Sigma'(z, t, T) dz \\
&= (L_{t+\Delta} - L_{\Delta}) \Sigma(t, t, T) - \int_0^t (L_{z+\Delta} - L_{\Delta}) \Sigma'(z, t, T) dz \\
&= Y_t^{\Delta} \Sigma(t, t, T) - \int_0^t Y_z^{\Delta} \Sigma'(z, t, T) dz \\
&= \int_0^t \Sigma(s, t, T) dY_s^{\Delta}.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich mit Itô's Formel, angewandt auf $X_s := (Y_s^{\Delta}, s)$ und $f(x, s) := x \Sigma(s, t, T)$. \square

Beweis zu Satz 2. Anwenden von Gleichung (7) auf $B(t + \Delta, T + \Delta)$, $B(\Delta, T + \Delta)$ und $B(\Delta, t + \Delta)$ führt zu

$$\begin{aligned}
& B(t + \Delta, T + \Delta) \\
&= \frac{B(\Delta, T + \Delta)}{B(\Delta, t + \Delta)} \exp \left(- \int_{\Delta}^{t+\Delta} A(s, t + \Delta, T + \Delta) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Delta}^{t+\Delta} \Sigma(s, t + \Delta, T + \Delta) dL_s \right) \\
&\stackrel{(10)}{=} \frac{B(\Delta, T + \Delta)}{B(\Delta, t + \Delta)} \exp \left(- \int_0^t A(s, t, T) ds + \int_{\Delta}^{t+\Delta} \Sigma(s, t + \Delta, T + \Delta) dL_s \right) \\
&\stackrel{\text{Lemma 3}}{=} \frac{B(\Delta, T + \Delta)}{B(\Delta, t + \Delta)} \exp \left(- \int_0^t A(s, t, T) ds + \int_0^t \Sigma(s, t, T) dY_s^{\Delta} \right). \quad (27)
\end{aligned}$$

Einsetzen von (27) in (24) liefert

$$B^{\Delta}(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left(- \int_0^t A(s, t, T) ds + \int_0^t \Sigma(s, t, T) dY_s^{\Delta} \right).$$

Mit den in Lemma 3 genannten Eigenschaften von Y_t^{Δ} und (7) folgt die Behauptung. \square

Lemma 4. Für feste Δ, t, T mit $t \leq \Delta$ und $N \leq \left\lceil \frac{T^* - T}{\Delta} \right\rceil$ sind die Zufallsvariablen $B(t, T)$, $B^{\Delta}(t, T)$, $B^{2\Delta}(t, T), \dots, B^{N\Delta}(t, T)$ vollständig stochastisch unabhängig.

Beweis. Für alle $n \in \{0, \dots, N\}$ gilt $\sigma(B^{n\Delta}(t, T))$ ist stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}_{n\Delta}$ laut Definition 1. Dabei ist $\mathcal{F}_{n\Delta} = \sigma(L_t | t \in [0, n\Delta])$. Für alle $n \geq 1$ gilt $\sigma(B^{0\Delta}(t, T), \dots, B^{(n-1)\Delta}(t, T)) \subseteq \mathcal{F}_{n\Delta}$. Seien nun für alle $n \leq N$ $E_n \in \sigma(B^{n\Delta}(t, T))$ beliebig. Dann ist auch $\bigcap_{i \leq n-1} E_i \in \mathcal{F}_{n\Delta}$. Induktiv folgt die Behauptung. \square

Wir wählen $\Delta = t$ als die kleinste Schrittweite, für die die $B^{n\Delta}(t, T)$ mit $n \in \{0, \dots, [(T^* - T)/t]\}$ vollständig stochastisch unabhängig sind. Für $i \in \{1, 2\}$, $\Delta = t_i$ und $n \in \{0, \dots, [(T^* - T)/t_i]\}$ können die Werte von $B^{n\Delta}(t_i, T_i)$ aus historischen Bondpreisdaten berechnet werden. Diese sollen die in Gleichung (23) benötigten Samples $B_n(t_i, T_i)$ für die Schätzung von $\text{Corr}(B(t_1, T_1), B(t_2, T_2))$ liefern. Damit sie für die Korrelationsschätzung tauglich sind, muss zudem die folgende Gleichheit gelten.

Satz 5. Für alle $\Delta \geq t_1, t_2$ und alle $n \in \{0, \dots, [(T^* - T)/\Delta]\}$ ist

$$\text{Corr}(B^{n\Delta}(t_1, T_1), B^{n\Delta}(t_2, T_2)) = \text{Corr}(B(t_1, T_1), B(t_2, T_2)). \quad (28)$$

Für den Beweis von Satz 5 braucht man das folgende Lemma.

Lemma 6. Die Prozesse $I^L := \int_0^\cdot \Sigma(s, t_0, T) dL_s$ und $I^\Delta := \int_0^\cdot \Sigma(s, t_0, T) dY_s^\Delta$ haben unabhängige Zuwächse. t_0 ist dabei ein fester Wert in $[0, T]$.

Beweis. Definition 1 und die Definition von Y^Δ ergeben, dass L und Y^Δ unabhängige Zuwächse haben. Mit Kapitel II, Theorem 4.15 in [18] folgt: Die Charakteristiken von L und Y^Δ sind deterministisch. Zudem ist Σ deterministisch. Mit Lemma 3.3 in Eberlein et al. [15] folgt, dass I^L und I^Δ deterministische Charakteristiken haben. Erneutes Anwenden von Kapitel II, Theorem 4.15 in [18] liefert die gesuchte Behauptung. \square

Beweis zu Satz 5. Da $Y_t^{n\Delta}$ gleich verteilt ist wie L_t , gilt

$$\mathbb{E}[B^{n\Delta}(t, T)] = \mathbb{E}[B(t, T)] \quad \text{und} \quad \text{Var}(B^{n\Delta}(t, T)) = \text{Var}(B(t, T)). \quad (29)$$

Sei nun o.B.d.A. $t_2 \geq t_1$. Dann gilt mit dem Zusammenhang aus Abschnitt 4.2

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_0^{t_1} \Sigma(s, t_1, T_1) dY_s^{n\Delta} + \int_0^{t_2} \Sigma(s, t_2, T_2) dY_s^{n\Delta} \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\exp \left((C+1) \int_0^{t_1} \Sigma(s, t_2, T_2) dY_s^{n\Delta} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma(s, t_2, T_2) dY_s^{n\Delta} \right) \right] \\
&\stackrel{\text{Lemma 6}}{=} \mathbb{E} \left[\exp \left((C+1) \int_0^{t_1} \Sigma(s, t_2, T_2) dY_s^{n\Delta} \right) \right] \\
&\quad \times \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_{t_1}^{t_2} \Sigma(s, t_2, T_2) dY_s^{n\Delta} \right) \right] \\
&\stackrel{Y_t^{n\Delta} \sim L_t}{=} \mathbb{E} \left[\exp \left((C+1) \int_0^{t_1} \Sigma(s, t_2, T_2) dL_s \right) \right] \\
&\quad \times \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_{t_1}^{t_2} \Sigma(s, t_2, T_2) dL_s \right) \right] \\
&\stackrel{\text{Lemma 6}}{=} \mathbb{E} \left[\exp \left((C+1) \int_0^{t_1} \Sigma(s, t_2, T_2) dL_s + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma(s, t_2, T_2) dL_s \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_0^{t_1} \Sigma(s, t_1, T_1) dL_s + \int_0^{t_2} \Sigma(s, t_2, T_2) dL_s \right) \right] \\
&\Rightarrow \mathbb{E}[B^{n\Delta}(t_1, T_1) B^{n\Delta}(t_2, T_2)] = \mathbb{E}[B(t_1, T_1) B(t_2, T_2)]. \tag{30}
\end{aligned}$$

Mit der Definition der Korrelation folgt die Behauptung aus (29) und (30). \square

Das in diesem Abschnitt beschriebene Verfahren zur Schätzung von Korrelationen ist nicht ohne Weiteres auf inhomogene Lévy-Prozesse als treibende Prozesse anwendbar. Die Grundlage der hier beschriebenen Vorgehensweise ist $B^{n\Delta}(t, T) \sim B(t, T)$ für alle $n \in \{0, \dots, [(T^* - T)/\Delta]\}$. Diese Eigenschaft gilt für inhomogene Lévy-Prozesse im Allgemeinen nicht, da sich bei ihnen die Zuwachsverteilung im Laufe der Zeit ändert.

5.2 Schätzung der Parameter aus Korrelationen

Im Weiteren wird angenommen, dass L von einer GH-Verteilung erzeugt wird. Zur Schätzung der Parameter der GH-Verteilung wird die in Eberlein und Janssen [10] entwickelte Korrelationsformel benutzt, aus der man einen direkten Zusammenhang zwischen den Korrelationen zwischen Bondpreisen und den Verteilungsparametern des treibenden Lévy-Prozesses ableiten kann. Diese hat die Form

$$\begin{aligned}
& \text{Corr}(B(t_1, T_1), B(t_2, T_2)) \\
&= \exp \left(\int_{t_1}^{t_2} \theta(\Sigma(s, t_2, T_2)) ds \right) \frac{g_1(t_1, t_2, T_1, T_2) - g_2(t_1, t_2, T_1, T_2)}{\sqrt{h(t_1, T_1)} \sqrt{h(t_2, T_2)}} \tag{31}
\end{aligned}$$

für $0 \leq t_1 \leq T_1 \leq T^*$ und $0 \leq t_2 \leq T_2 \leq T^*$ mit $t_1 \leq t_2$. Dabei sind

$$\begin{aligned} g_1(t_1, t_2, T_1, T_2) &:= \exp\left(\int_0^{t_1} \theta(\Sigma(s, t_1, T_1) + \Sigma(s, t_2, T_2)) ds\right), \\ g_2(t_1, t_2, T_1, T_2) &:= \exp\left(\int_0^{t_1} \theta(\Sigma(s, t_1, T_1)) + \theta(\Sigma(s, t_2, T_2)) ds\right), \\ h(t, T) &:= \exp\left(\int_0^t \theta(2\Sigma(s, t, T)) ds\right) - \exp\left(\int_0^t 2\theta(\Sigma(s, t, T)) ds\right). \end{aligned}$$

Über den Zusammenhang $\theta(u) = \log(M(u))$ (siehe Kapitel 4.1) kann man mit (15) und (20) aus obiger Formel die Parameter der GH-Verteilung gewinnen. Für den folgenden Spezialfall geben wir diesen Zusammenhang explizit an.

Satz 7. *Sei im Lévy-Forward-Rate-Modell mit Ho-Lee-Volatilität der treibende Prozess von einer NIG-Verteilung erzeugt. Dann gilt für $0 \leq t \leq T_1 \leq T_2 \leq T^*$*

$$\text{Corr}(B(t, T_1), B(t, T_2)) = \frac{G_1(t, T_1, T_2) - G_2(t, T_1, T_2)}{\sqrt{H(t, T_1)}\sqrt{H(t, T_2)}} \quad (32)$$

mit

$$\begin{aligned} G_1(t, T_1, T_2) &:= \exp\left(-\delta t \sqrt{\alpha^2 - (\beta + T_1 + T_2 - 2t)^2}\right), \\ G_2(t, T_1, T_2) &:= \exp\left(-\delta t \left(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + T_1 - t)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{\alpha^2 - (\beta + T_2 - t)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)\right), \\ H(t, T) &:= \exp\left(-\delta t \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 2(T - t))^2}\right) \\ &\quad - \exp\left(-\delta t \left(2\sqrt{\alpha^2 - (\beta + T - t)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass der Parameter μ der NIG-Verteilung die Korrelation nicht beeinflusst. Für GH-Verteilungen im Allgemeinen und für die Vasiček-Volatilitätsstruktur lässt sich die Korrelationsformel auf ähnliche Weise berechnen. Die Ausdrücke sind jedoch weitaus umfangreicher und werden deshalb hier nicht angegeben.

Beweis. Da der Exponentialterm vor dem Bruch in (31) für $t_1 = t_2 = t$ Eins ergibt, gilt

$$\text{Corr}(B(t, T_1), B(t, T_2)) = \frac{g_1(t, t, T_1, T_2) - g_2(t, t, T_1, T_2)}{\sqrt{h(t, T_1)}\sqrt{h(t, T_2)}}. \quad (33)$$

Dabei sind, mit (20) und (21),

$$\begin{aligned}
g_1(t, t, T_1, T_2) &= \exp\left(\int_0^t \theta(\Sigma(s, t, T_1) + \Sigma(s, t, T_2)) ds\right) \\
&= \exp\left(\int_0^t \theta(T_1 + T_2 - 2t) ds\right) \\
&= \exp(t\theta(T_1 + T_2 - 2t)) \\
&= \exp\left(t\left(\mu(T_1 + T_2 - 2t) + \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + T_1 + T_2 - 2t)^2}\right)\right)
\end{aligned} \tag{34}$$

und

$$\begin{aligned}
g_2(t, t, T_1, T_2) &= \exp\left(\int_0^t \theta(\Sigma(s, t, T_1)) + \theta(\Sigma(s, t, T_2)) ds\right) \\
&= \exp(t(\theta(T_1 - t) + \theta(T_2 - t))) \\
&= \exp\left(t\left(\mu(T_1 + T_2 - 2t) + 2\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \delta\left(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + T_1 - t)^2} + \sqrt{\alpha^2 - (\beta + T_2 - t)^2}\right)\right)\right).
\end{aligned} \tag{35}$$

Für $h(t, T)$ ergibt sich mit den gleichen Argumenten

$$\begin{aligned}
h(t, T) &= \exp\left(\int_0^t \theta(2\Sigma(s, t, T)) ds\right) - \exp\left(\int_0^t 2\theta(\Sigma(s, t, T)) ds\right) \\
&= \exp(t\theta(2(T - t))) - \exp(2t\theta(T - t)) \\
&= \exp\left(t\left(2\mu(T - t) + \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + 2(T - t))^2}\right)\right) \\
&\quad - \exp\left(2t\left(\mu(T - t) + \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + (T - t))^2}\right)\right).
\end{aligned} \tag{36}$$

Nun sieht man, dass in Gleichung (33) mit dem Term

$$\exp(\mu t(T_1 + T_2 - 2t)) \exp\left(t\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)$$

gekürzt werden kann. Der gekürzte Bruch entspricht dem aus Gleichung (32). \square

Für K verschiedene Tripel (t^k, T_1^k, T_2^k) kann nun das Parametertripel (α, β, δ) der NIG-Verteilung per Least-Squares-Verfahren ermittelt werden. Als Schätzer $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta})$ für (α, β, δ) wird also dasjenige Parametertripel gewählt, das folgenden Ausdruck minimiert:

$$\sum_{k=1}^K \left(\hat{\text{Corr}}\left(B(t^k, T_1^k), B(t^k, T_2^k)\right) - \text{Corr}\left(B(t^k, T_1^k), B(t^k, T_2^k)\right)\right)^2. \tag{37}$$

μ kann anschließend über Gleichung (18) aus den geschätzten Parametern errechnet werden.

In Kapitel 7 vergleichen wir die Parameterschätzung bei NIG-Verteilung mit derselben Schätzmethode angewandt auf das HJM-Modell. Im HJM-Modell ist der treibende Prozess eine Brownsche Bewegung. Es gilt also: $L_1 \sim N(\mu, \sigma)$ ist normalverteilt. Im HJM-Modell funktioniert die Methode genau wie oben beschrieben. Die Korrelationsformel von Eberlein und Janssen gilt auch hier.

Satz 8. *Im HJM-Modell mit Ho-Lee-Volatilitätsstruktur ist für $0 \leq t \leq T_1 \leq T_2 \leq T^*$*

$$\text{Corr}(B(t, T_1), B(t, T_2)) = \frac{\exp(\sigma^2 t(T_1 - t)(T_2 - t)) - 1}{\sqrt{\exp(\sigma^2 t(T_1 - t)^2) - 1} \sqrt{\exp(\sigma^2 t(T_2 - t)^2) - 1}}. \quad (38)$$

Zu beachten ist, dass wie auch bei NIG-Verteilungen der Parameter μ der Normalverteilung nicht in die Korrelation eingeht.

Beweis. Mit Gleichung (2) sieht man, dass die Charakteristik zur Brownschen Bewegung $(t\mu, t\sigma^2, 0)$ ist, wobei 0 hier das Maß bezeichnet, das jeder Menge den Wert 0 zuordnet. Mit Gleichung (4) ergibt sich, dass für die Brownsche Bewegung $\theta(u) = u\mu + \frac{1}{2}u^2\sigma^2$ gilt. Im Weiteren wird analog zum Beweis von Satz 7 vorgegangen. Obiges θ wird in (34), (35) und (36) eingesetzt. Um die Behauptung zu erhalten, muss nun noch in Gleichung (33) mit dem Term

$$\exp\left(\mu t(T_1 + T_2 - 2t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t\left((T_1 - t)^2 + (T_2 - t)^2\right)\right)$$

gekürzt werden. □

Wie bei der NIG-Verteilung kann nun der Parameter σ der Normalverteilung per Least-Squares-Verfahren aus den empirischen Bondpreiskorrelationen gewonnen werden. Wie in Kapitel 3.1 gezeigt, kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $E[L_t] = 0$ gewählt werden. Damit kann der Parameter μ der Normalverteilung gleich 0 gesetzt werden.

5.3 Schätzung der Parameter aus Log>Returns

Die Methode zur Schätzung der Verteilungsparameter aus täglichen Log>Returns werden wir verwenden, um Vergleichswerte für die über die Korrelationen geschätzten Parameter zu erzeugen. Die Beschreibung der Methode folgt den Ausführungen in Eberlein und Kluge [11]. Wir werden die Methode hier nur für die Ho-Lee-Volatilitätsstruktur vorstellen. Mit der Vasiček-Volatilitätsstruktur funktioniert das Verfahren ähnlich. Da bei der Parameterschätzung aus Log>Returns nicht die Fälligkeit T der Bonds, sondern ihre Restlaufzeit $(T - t)$ von Bedeutung ist, führen wir für die Restlaufzeit die Bezeichnung $T' := (T - t)$ ein. t wählen wir in diesem Abschnitt in ganzen Tagen. Die täglichen Log>Returns $LR(t, t + T')$ zur Restlaufzeit T' werden definiert als Logarithmen der

Verhältnisse zwischen Bondpreisen und ihren Forwardpreisen am vorigen Tag, also als

$$LR(t, t + T') := \log \frac{B(t + 1, t + T')}{B(t, t + 1, t + T')}, \quad (39)$$

wobei der Forwardpreis $B(t, t + 1, t + T')$ definiert ist als $B(t, t + 1, t + T') := \frac{B(t, t + T')}{B(t, t + 1)}$. Gleichungen (7) und (39) liefern für die Log>Returns

$$LR(t, t + T') = - \int_t^{t+1} A(s, t + 1, t + T') ds + \int_t^{t+1} \Sigma(s, t + 1, t + T') dL_s. \quad (40)$$

Mit Gleichung (10) ist es leicht zu zeigen, dass der Wert des Integrals über A in Darstellung (40) von t unabhängig ist. Somit kann man es in Abhängigkeit von T' schreiben als

$$d(T') := - \int_t^{t+1} A(s, t + 1, t + T') ds = - \int_0^1 A(s, 1, T') ds. \quad (41)$$

Mit der Ho-Lee-Volatilitätsstruktur gilt für das Integral über Σ in (40)

$$\int_t^{t+1} \Sigma(s, t + 1, t + T') dL_s = (T' - 1)Y_1^t \quad (42)$$

mit $Y_1^t = L_{t+1} - L_t$ wie in Lemma 3. Also ist $Y_1^t \sim L_1$ und Y_1^t stochastisch unabhängig von Y_1^s für alle $s \neq t$. Für die Log>Returns ergibt sich

$$LR(t, t + T') = d(T') + (T' - 1)Y_1^t. \quad (43)$$

Da $\mathbb{E}[Y_1^t] = \mathbb{E}[L_1] = 0$ (siehe Lemma 3 und Kapitel 3.1) und d deterministisch ist, gilt

$$d(T') = \mathbb{E}[LR(t, t + T')]. \quad (44)$$

$\mathbb{E}[LR(t, t + T')]$ ist also für alle t gleich. Y_1^t lässt sich mit (43) und (44) schreiben als

$$Y_1^t = \frac{1}{T' - 1} (LR(t, t + T') - \mathbb{E}[LR(t, t + T')]). \quad (45)$$

Mit Gleichung (45) hat man eine Formel, in der Y_1^t nur von Log>Returns und ihren Erwartungswerten abhängt. Allerdings ist in dieser Gleichung die rechte Seite von T' abhängig und die linke nicht. Im Modell sollte sich also für verschiedene Werte von T' derselbe Wert für Y_1^t ergeben. Bei realen Marktdaten stimmt dieser Zusammenhang in der Regel nicht ganz (siehe [11]). Um dieses Problem zu umgehen, kann man für jedes feste t die Punkte $(T'_1 - 1, LR(t, t + T'_1) - \mathbb{E}[LR(t, t + T'_1)])$, ..., $(T'_m - 1, LR(t, t + T'_m) - \mathbb{E}[LR(t, t + T'_m)])$ für m verschiedene Werte $T'_1 < \dots < T'_m$ von T' betrachten und über sie eine Regression durch den Ursprung durchführen. Der Wert für Y_1^t ergibt sich als der Gradient der Regressionsgeraden. Mit diesem Verfahren kann man also für $t \in \{0, 1, 2, \dots, [T^* - T'_m]\}$ ($[T^* - T'_m] + 1$) stochastisch unabhängige Samples von L_1 aus Log>Returns und ihren Erwartungswerten berechnen. Die Log>Returns kann man direkt aus

historischen Bondpreisen berechnen. Da die Erwartungswerte der Log>Returns $\mathbb{E}[LR(t, t + T')]$ nur von T' abhängen (siehe Gleichung (44)), ist für festes T'

$$\frac{1}{[T^* - T']} \sum_{t=0}^{[T^* - T']} LR(t, t + T')$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $\mathbb{E}[LR(t, t + T')]$.

Aus den stochastisch unabhängigen Samples von L_1 kann man dann die Parameter der zugrunde liegenden GH-Verteilung mit der Maximum-Likelihood-Methode oder der Kumulantenmethode schätzen.

Im Folgenden werden wir kurz die bei der Kumulantenmethode für NIG-Verteilungen verwendeten Schätzer auflisten, da diese auch im nächsten Abschnitt benötigt werden. Die Darstellung erfolgt analog zu Kluge [19]. Nachdem man die ersten vier Kumulanten κ_1 , κ_2 , κ_3 und κ_4 mit den üblichen Methoden aus den unabhängigen Samples von L_1 geschätzt hat, ergeben sich für α , β , δ und μ folgende Schätzer $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\delta}$ und $\hat{\mu}$:

Falls $\hat{\kappa}_3 = 0$:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \sqrt{3 \frac{\kappa_2}{\kappa_4}} \\ \hat{\beta} &= 0 \\ \hat{\delta} &= \hat{\alpha} \kappa_2 \\ \hat{\mu} &= \kappa_1 \end{aligned} \tag{46}$$

und falls $\hat{\kappa}_3 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3} - \frac{5\kappa_3}{3\kappa_2} \right)^{-1} \\ \hat{\alpha} &= \sqrt{3\hat{\beta} \frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \hat{\beta}^2} \\ \hat{\delta} &= \frac{\left(\sqrt{\hat{\alpha}^2 - \hat{\beta}^2} \right)^3}{\hat{\alpha}^2} \kappa_2 \\ \hat{\mu} &= \kappa_1 - \frac{\hat{\delta} \hat{\beta}}{\sqrt{\hat{\alpha}^2 - \hat{\beta}^2}} \end{aligned} \tag{47}$$

5.4 Kombination der Schätzmethode

Bei der Schätzmethode über Korrelationen werden die Parameter des treibenden Prozesses geschätzt, indem die quadratischen Abstände zwischen empirischen Bondpreiskorrelationen und denen im Modell minimiert werden. Als Resultat ergeben sich Parametersätze, mit denen im Modell realistische Bondpreiskorrelationen entstehen. Bei der Methode über Log>Returns wird die Schätzung anhand stochastisch unabhängiger Samples von L_1 durchgeführt. Folglich ergeben sich Parametersätze, die Modelle mit realistischen Dichten für L_1 liefern.

Wie in Kapitel 7 beschrieben, ergeben sich jedoch bei Schätzungen über Korrelationen keine realistischen Dichten für L_1 und bei Schätzungen über Log>Returns keine realistischen Bondpreiskorrelationen. Eine Schätzmethode, die sowohl realistische Dichten für L_1 als auch realistische Modellkorrelationen erzeugt, muss also sowohl Samples von L_1 als auch Samples der Bondpreiskorrelationen berücksichtigen.

In diesem Abschnitt entwickeln wir eine Schätzmethode, die beide Ansätze kombiniert. Dazu wird ein Teil der Parameter der NIG-Verteilung über Korrelationen geschätzt, während ein anderer Teil über Log>Returns mit der Kumulantenmethode bestimmt wird. Wir schätzen β über Korrelationen und α und δ über Log>Returns. Diese Aufteilung der über Korrelationen und über Log>Returns zu schätzenden Parameter bietet sich an. Somit erzeugen wir nämlich eine Verteilung, deren zweite und dritte Kumulante den geschätzten Kumulanten κ_2 und κ_3 entsprechen (siehe dazu (4.20) und (4.21) in [19]). Auch für die Implementierung ist diese Aufteilung günstig, da $\hat{\alpha}$ und $\hat{\delta}$ in den Gleichungen (46) und (47) in Abhängigkeit von $\hat{\beta}$ angegeben sind. Man könnte die Aufteilung der über Korrelationen und über Log>Returns zu schätzenden Parameter auch anders wählen. Dann müsste man Gleichungen (46) und (47) nach den über Korrelationen zu schätzenden Parametern auflösen.

Konkret gehen wir wie folgt vor: Zunächst schätzen wir die Kumulanten κ_2 und κ_3 mit den üblichen Methoden. Falls $\hat{\kappa}_3 = 0$ ist, brechen wir ab. Für $\hat{\kappa}_3 = 0$ lässt sich β nicht über die Korrelationen schätzen, da $\hat{\beta}$ durch Gleichung (46) schon als Null festgelegt ist. Bei den Schätzungen, die wir vornahmen, trat dieser Fall allerdings nie auf.

Falls $\hat{\kappa}_3 \neq 0$ ist, führen wir, wie in den Kapiteln 5.2 und 5.1 beschrieben, die Parameterschätzung über Bondpreiskorrelationen durch. Bei der Least-Squares-Schätzung (siehe Gleichung (37)) wird die Regression jedoch nicht über die Parametertripel (α, β, δ) durchgeführt, sondern nur über den Parameter β . Die fehlenden Parameter α und δ bestimmen wir in Abhängigkeit von β bei *jedem Regressionsschritt neu* aus den Kumulanten. Die Schätzer $\hat{\alpha}$ und $\hat{\delta}$ wählen wir also wie in Gleichung (47).

μ schätzen wir, wie auch bei der Korrelationsmethode, nachdem wir die anderen Parameter bestimmt haben, über Gleichung (18).

Es wird also $\hat{\beta}$ so bestimmt, dass sich im Modell möglichst realistische Bondpreiskorrelationen ergeben, während $\hat{\alpha}$ und $\hat{\delta}$ so geschätzt werden, dass die zweite Kumulante (also die Varianz) und die dritte Kumulante der Modellverteilung von L_1 den aus der empirischen Verteilung von L_1 geschätzten Kumulanten entsprechen.

6 Datensatz und Svensson-Methode

Der im Weiteren verwendete Datensatz besteht aus den Parametern $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1$ und τ_2 des in [23] eingeführten Zinsstrukturkurvenmodells von Svensson. Diese wurden von der Deutschen Bundesbank täglich aus den Kursdaten börsennotierter Bundeswertpapiere ermittelt. In die Berechnungen gehen die Tagesdaten vom 07.08.1997 bis zum 09.04.2008 ein (jeweils einschließlich). Wir betrachten somit 2707 Parametersätze. Zudem verwenden wir im Weiteren die Konvention, dass ein Jahr 260 Handelstagen entspricht.

Im von Svensson entwickelten Modell wird die Forward-Rate-Kurve $f(t, \cdot)$ zum Zeitpunkt t per Regression über die oben genannten Parameter in folgende Form gebracht:

$$f(t, T) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right) + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau_1}\right) \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right) + \beta_3 \left(\frac{T-t}{\tau_2}\right) \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_2}\right). \quad (48)$$

Die Anleihen, die den Berechnungen der Bundesbank zugrunde liegen, haben Restlaufzeiten T' von bis zu zehn Jahren. Damit sind die Werte von $f(t, T)$, die sich mit Gleichung (48) ergeben, nur plausibel, wenn T so gewählt wird, dass $T' \in [0, 10 \text{ Jahre}]$. Um die zur Parameterschätzung benötigten Bondpreise $B(t, T)$ zu erhalten, wird Gleichung (5) benutzt. (5) und (48) ergeben für $B(t, T)$

$$B(t, T) = \exp\left(-\beta_0(T-t) + \beta_1\tau_1\left(\exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right) - 1\right) + \beta_2(T-t + \tau_1)\right) \times \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right) - \beta_2\tau_1 + \beta_3(T-t + \tau_2) \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_2}\right) - \beta_3\tau_2. \quad (49)$$

Aus diesem Datensatz lässt sich also für $t = 0, \dots, 2706$ Tage und für beliebige Restlaufzeiten $T' \in [0, 10 \text{ Jahre}]$ der Wert von $B(t, T)$ bestimmen.

Andere Datensätze, die nicht über die Svensson Parameter die gesamte Zinsstrukturkurve, sondern $B(t, T)$ für bestimmte Werte von t und T' direkt enthalten, liefern oft nur Bondpreise für Restlaufzeiten in ganzen Jahren, also zum Beispiel $B(t, T)$ nur für $(T-t) \in \{1, 2, \dots, 10 \text{ Jahre}\}$. Sowohl für die Parameterschätzung über Korrelationen als auch für die Schätzung über Log>Returns benötigt man aber auch Bondpreise für andere Restlaufzeiten. Wenn man T' nur in ganzen Jahren wählt, benötigt man für die Schätzung über Korrelationen noch $B(0, T), B(0, t), B(\Delta, t + \Delta), B(\Delta, T + \Delta)$ (siehe Gleichung (24)). In Jahren gemessen haben diese im Allgemeinen keine ganzzahligen Restlaufzeiten. Bei der Schätzung über Log>Returns fehlen in solchen Datensätzen die Bondpreise $B(t+1, t+T') = B(t+1, (t+1) + (T'-1))$ und $B(t, t+1)$ (vergleiche Gleichung (39)).

Um die beiden Parameterschätzverfahren bei solchen Datensätzen trotzdem anwenden zu können, müsste man die fehlenden Bondpreise über eine Interpolation bestimmen. Bei Raible [22] wird zum Beispiel zur Bestimmung der Log>Returns eine Interpolation mit kubischen Splines über $-\log(B(t, T))$ durchgeführt.

7 Ergebnisse

In diesem Abschnitt wenden wir die in Kapitel 5 erläuterten Methoden auf den in Kapitel 6 beschriebenen Bundesbank-Datensatz und auf simulierte Daten an. Für die Schätzungen verwenden wir die Statistiksoftware Splus (Details zur Programmierung können dem Anhang entnommen werden). Eine der Hauptschwierigkeiten bei der Implementierung ist die große Anzahl lokaler Minima der Zielfunktion (37) bei der Schätzung der Parameter einer NIG-Verteilung über Korrelationen. Die Ergebnisse aller gängigen Regressionsalgorithmen hängen bei dieser Schätzung stark vom vorgegebenen Startwert ab. Um bei der Minimierung sicherzugehen, dass wir das globale Minimum finden, legen wir ein Gitter über den Kubus der möglichen Parametertripel (α, β, δ) und starten die Regression von jedem Gitterpunkt aus erneut. Wenn das Gitter feinmaschig genug gewählt wird, ist das Minimum der Ergebnisse aller durchgeführten Regressionen das globale Minimum der Zielfunktion.

Diese Vorgehensweise erzeugt sehr stichhaltige Ergebnisse, erfordert jedoch lange Rechenzeit. Daher führen wir diese Methode nur für NIG-Verteilungen und die Ho-Lee-Volatilitätsstruktur durch. Bei allgemeinen GH-Verteilungen und bei der Vasiček-Volatilität wäre der Rechenaufwand zu groß.

7.1 Empirische Resultate

Wie in Kapitel 5.2 beschrieben, werden alle Korrelationsschätzungen über die Minimierung des Ausdrucks

$$\sum_{k=1}^K \left(\hat{\text{Corr}} \left(B(t^k, T_1^k), B(t^k, T_2^k) \right) - \text{Corr} \left(B(t^k, T_1^k), B(t^k, T_2^k) \right) \right)^2$$

durchgeführt. Dabei durchlaufen die Tripel (t^k, T_1^k, T_2^k) von Zeitpunkten alle Werte aus der Menge

$$M := \{(t, T_1, T_2) \mid t \in \{1, \dots, 100 \text{ Tage}\}; \\ T_1 - t, T_2 - t \in \{1, \dots, 10 \text{ Jahre}\}; T_1 < T_2\}.$$

Somit ergibt sich $K = |M| = 4500$. In M wählen wir für t ein möglichst kontinuierliches Spektrum an Werten, um nicht nur einzelne Schnitte der Korrelationskurven zu berücksichtigen. Je größer der Wert von t gewählt wird, umso weniger Samples $B^\Delta(t, T_i)$ kann man zur Schätzung der Korrelationen erzeugen. Die Werte für Δ müssen mindestens um t voneinander entfernt sein, um die stochastische Unabhängigkeit der $B^\Delta(t, T_i)$ zu gewährleisten (siehe Lemma 4). Unser Datensatz beinhaltet Werte von 2707 Tagen. Für $t = 1$ Tag erhält man also 2706 Samples zur Korrelationsschätzung, für $t = 100$ Tage nur noch 27. Deshalb verzichten wir darauf, für t^k größere Werte als 100 Tage einzusetzen.

In M durchlaufen die Restlaufzeiten $T_1 - t$ und $T_2 - t$ für verschiedene t die gleichen Werte. Bei einer zweiten Schätzung wählen wir die Zeittripel so, dass nicht die Restlaufzeiten $T_i - t$, sondern die Maturitäten T_i konstant bleiben. Die

Tabelle 1: Geschätzte Parameter zum Datensatz aus Kapitel 6

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\mu}$	Methode
2.851,52	-2.841,25	4,36e-15	5,12e-14	Corr
925.368,70	-116.159,76	2,92e-6	3,48e-7	LR Maximum-Likelihood
433.895,03	-45.926,08	1,38e-6	1,25e-7	LR Kumulantenmethode
5.336,01	-7,03	1,72e-8	2,27e-11	Corr-LR Kombination
$\hat{\sigma} = 5,71e - 5$		$\hat{\mu} = 0$		HJM Corr

erzeugten Modellkorrelationen und Dichten ähneln denen aus der Schätzung mit Zeittripeln aus M sehr. Daher gehen wir im Weiteren auf diese zweite Schätzung nicht gesondert ein.

Die Ergebnisse der Parameterschätzungen für NIG-Verteilungen und die Ho-Lee-Volatilitätsstruktur anhand des Bundesbank-Datensatzes kann man Tabelle 1 entnehmen. Die Parameter in der ersten Zeile sind per Schätzung über Korrelationen von Bonds entstanden. Zeilen zwei und drei zeigen die Ergebnisse der Schätzung über Log>Returns, wie sie in Kapitel 5.3 beschrieben ist. Die Schätzung erfolgte jeweils einmal mit der Maximum-Likelihood- und der Kumulantenmethode. Zeile vier zeigt die Parameter, die mit der kombinierten Schätzmethode aus Kapitel 5.4 erzeugt wurden. Bei der Schätzung über Korrelationen und bei der kombinierten Schätzung kann μ nicht direkt mitgeschätzt werden, da es in der Korrelationsformel (32) nicht auftaucht. Wie in Kapitel 5.2 beschrieben, wurde hier der Wert von $\hat{\mu}$ nach der Schätzung über Gleichung (18) bestimmt.

Auch das HJM-Modell mit Ho-Lee-Volatilität kann über empirische Bondpreiskorrelationen kalibriert werden. Die Ergebnisse dieser Kalibrierung des HJM-Modells können der letzten Zeile von Tabelle 1 entnommen werden. $\hat{\mu}$ kann hier, wie auch bei den NIG-Verteilungen, nicht aus den Korrelationen geschätzt werden. Es wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich 0 gesetzt, wie in Kapitel 5.2 erklärt.

Abbildung 1 zeigt empirische Korrelationen zwischen Bonds mit der Fälligkeit ein Jahr und Bonds mit Fälligkeiten 2, 5 und 10 Jahre und die Bondpreiskorrelationen, die sich in den verschiedenen über Korrelationen kalibrierten Modellen ergeben. In der linken Grafik sind (als durchgezogene Linien) Modellkorrelationen eingezeichnet, die sich im Lévy-Forward-Rate-Modell ergeben, wenn man dem treibenden Lévy-Prozess die NIG-Verteilung zu den Parametern aus der ersten Zeile von Tabelle 1 zugrunde legt. Die durchgezogenen Linien in der rechten Grafik stellen die Korrelationen dar, die sich im HJM-Modell mit den Parametern aus der letzten Zeile von Tabelle 1 ergeben. Die als Punkte dargestellten empirischen Korrelationen sind, wie in Kapitel 5.1 beschrieben, aus dem Datensatz geschätzt. In beiden Grafiken sind dieselben empirischen Korrelationen eingezeichnet.

Man sieht deutlich, dass die mit der NIG-Verteilung erzeugten Modellkorre-

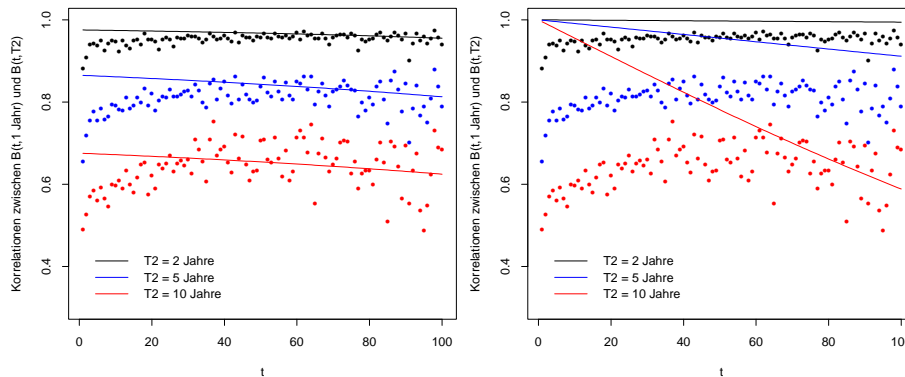


Abbildung 1: Empirische (gepunktet) und Modellkorrelationen für die Kalibrierung des Lévy-Forward-Rate-Modells mit NIG-Verteilungen (links) und für die Kalibrierung des HJM-Modells (rechts)

lationen sich gut an die empirischen Korrelationen anpassen lassen. Wie man sieht, sind die Modellkorrelationen im HJM-Modell vor allem für kleine Werte von t wenig flexibel. Deshalb ist in diesem Modell keine sinnvolle Anpassung an empirische Korrelationen möglich.

Die beiden Kalibrierungen über Log>Returns liefern Modellkorrelationen, die für beliebige Werte von t , T_1 und T_2 stets über 0,9995 liegen, sich also stark von den empirischen Korrelationen unterscheiden.

Abbildung 2 zeigt dieselben Korrelationen wie Abbildung 1 links. Diesmal ist an der t -Achse der gesamte Zeitraum bis zur Fälligkeit von $B(t, 1\text{Jahr})$ angetragen. Wie erwartet, nehmen die Korrelationen ab, wenn sich t der Fälligkeit von $B(t, 1\text{Jahr})$ nähert. Die empirischen Korrelationen sind wieder nur bis $t = 100$ Tage angetragen, da empirische Korrelationen für größere t -Werte nicht sinnvoll geschätzt werden können, wie oben beschrieben ist.

Abbildung 3 zeigt die empirische Dichtefunktion von L_1 , die wie in Kapitel 5.3 aus dem Datensatz berechnet wurde. Zudem sind die beiden mit der über Log>Returns per Maximum-Likelihood-Methode und per Kumulantenmethode geschätzten Modelldichten von L_1 eingetragen. Die über Korrelationen geschätzten Parametersätze erzeugen weitaus steilere Dichten für L_1 . In der Grafik würden sie nur als senkrechte Linien bei $x = 0$ erscheinen.

Abbildung 4 zeigt die Modellkorrelationen und Modelldichten, die bei der kombinierten Schätzung entstehen. Wie man sieht, sind die Modellkorrelationen, die mit der kombinierten Schätzung entstehen, deutlich besser als die Modellkorrelationen in den über Log>Returns kalibrierten Modellen. Realistisch sind sie dennoch nicht. Analog verhalten sich die Modelldichten. Die über die Kombination der Methoden erzeugte Modelldichte ist besser als die Dichte im über Korrelationen kalibrierten Modell. Sie bleibt aber immer noch sehr unrealistisch.

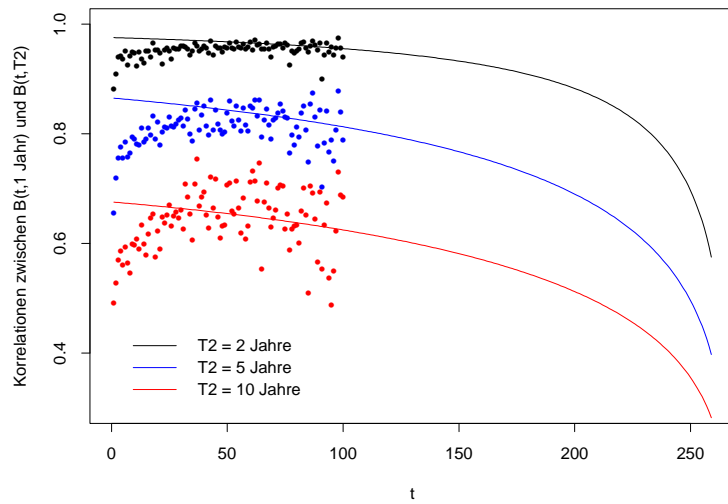


Abbildung 2: Empirische (gepunktet) und Modellkorrelationen für die Kalibrierung mit NIG-Verteilungen

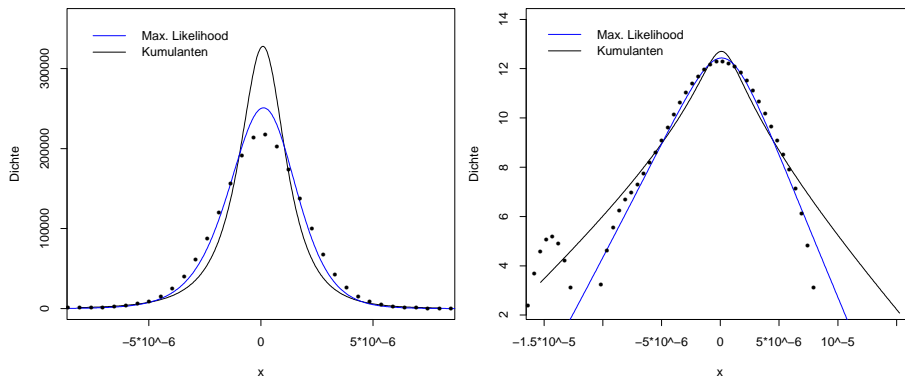


Abbildung 3: Empirische (gepunktet) und Modelldichten für die beiden Kalibrierungen über Log>Returns, rechts logarithmiert

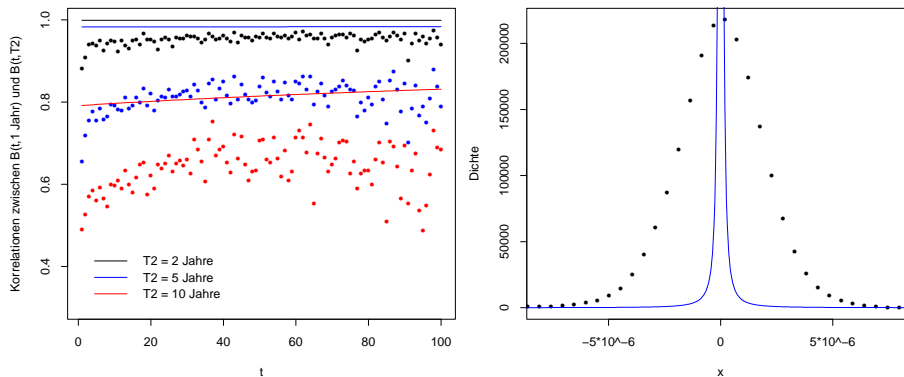


Abbildung 4: Korrelationen und Dichte für die kombinierte Schätzung

Zusammengefasst ergeben sich bei der Modellkalibrierung anhand des Bundesbank-Datensatzes folgende Ergebnisse: Das HJM-Modell reicht zur Erzeugung realistischer Modellkorrelationen nicht aus. Das Lévy-Forward-Rate-Modell liefert mit NIG-Verteilungen über Korrelationen kalibriert gute Modellkorrelationen und über Log>Returns kalibriert gute Modelldichten. Die Kombination der beiden Methoden erzeugt sowohl für die Korrelationen als auch für die Dichte Werte, die grob in der richtigen Größenordnung liegen, aber dennoch unrealistisch sind.

7.2 Simulationen

Um zu überprüfen, inwieweit die Ergebnisse der Modellkalibrierung aus Kapitel 7.1 von dem zugrunde gelegten Datensatz abhängen, führen wir noch zwei Kalibrierungen an simulierten Daten durch. Dazu simulieren wir Sätze von je 2707 Tagesdaten, die alle für die Schätzungen benötigten Bondpreise enthalten. Die Länge der simulierten Datensätze wird mit 2707 gleich groß gewählt wie die des Bundesbank-Datensatzes. Die Bondpreise simulieren wir wie folgt: Die Startwerte $B(0, T)$ für alle Werte von T übernehmen wir aus dem Bundesbank-Datensatz. $A(s, t, T)$ setzen wir als konstant 0. Da $A(s, t, T)$ in die Schätzungen nicht eingeht, spielt sein Wert bei der Simulation keine Rolle. Die Werte von L_t simulieren wir für fest vorgegebene Verteilungsparameter. Nur L_t zu simulieren ist ausreichend, da sich das stochastische Integral in Gleichung (7) bei Verwendung der Ho-Lee-Volatilität auflösen lässt. Somit haben wir alle Werte erzeugt, um mit Gleichung (7) die benötigten Bondpreise zusammenzusetzen.

Wir führen zwei Simulationen durch, wobei wir zur Erzeugung des Datensatzes zwei verschiedene Verteilungen für L_1 verwenden. Beide Verteilungen sind NIG-Verteilungen, ihre Parameter sind in Tabelle 2 mit „Ausgangsparameter“ bezeichnet. Die Parametersätze, die als Grundlagen der Simulationen dienen, sind frei gewählt. Für α wählen wir sehr große und für δ entsprechend kleine Werte. Dadurch erhalten wir sehr spitze Wahrscheinlichkeitsdichten (die Vari-

Tabelle 2: Parameter der der Simulation zugrunde liegenden Verteilungen und der geschätzten Verteilungen

α bzw. $\hat{\alpha}$	β bzw. $\hat{\beta}$	δ bzw. $\hat{\delta}$	μ bzw. $\hat{\mu}$	
1e6	1	1e-6	0	Ausgangsparameter Sim. 1
557.861,94	104,66	3,23e-7	-6,05e-11	Corr
963.715,27	-37.667,65	9,20e-7	3,30e-8	LR
1,39e7	6,56e6	9,07e-6	-4,87e-6	Corr-LR Kombination
1e6	-5e5	1e-6	0	Ausgangsparameter Sim. 2
363.831,26	-9,34	3,88e-7	9,95e-12	Corr
636.058,09	-61.072,93	1,04e-6	3,56e-7	LR
4,90e8	-4,90e8	1,28e-7	2,36e-6	Corr-LR Kombination

anzen der Verteilungen sind beide kleiner oder gleich 10^{-12}). Weniger spitze Dichten würden unrealistische Log>Returns und Korrelationen erzeugen, sodass eine sinnvolle Schätzung nicht möglich wäre. Bei der Grundlage der ersten Simulation wird β der Wert 1 zugewiesen, während die Größenordnung von α und δ der Größenordnung des Ergebnisses der Schätzung über Log>Returns anhand des Bundesbank-Datensatzes entspricht. Bei der Grundlage der zweiten Simulation wird β nahe bei $-\alpha$ gewählt, da β bei den Ergebnissen der Schätzungen über Korrelationen im vorigen Kapitel nahe an $-\alpha$ liegt.

Die Zeilen „Corr“, „LR“ und „Corr-LR Kombination“ zeigen die Ergebnisse der Schätzungen aus den jeweiligen simulierten Datensätzen. Die Schätzungen über Log>Returns verwenden die Maximum-Likelihood-Methode.

Abbildung 5 zeigt empirische und Modellkorrelationen zwischen Bonds mit der Fälligkeit ein Jahr und Bonds mit Fälligkeiten 2, 5 und 10 Jahre für die bei-

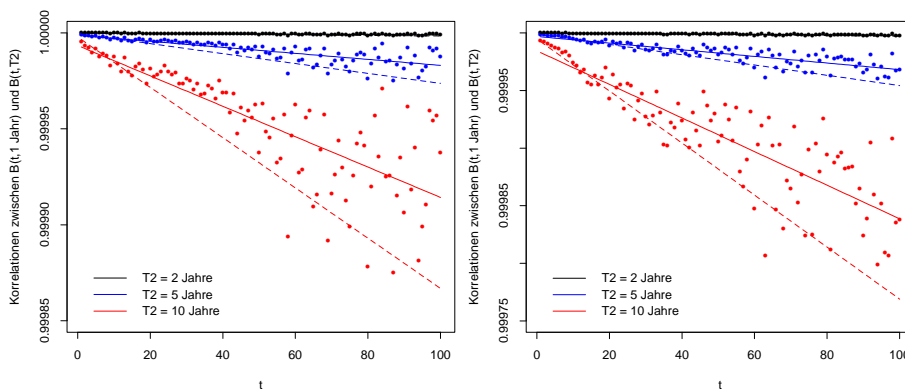


Abbildung 5: Empirische (gepunktet) und Modellkorrelationen (durchgezogene Linien: über Korrelationen kalibriertes Modell, unterbrochene Linien: über Log>Returns kalibriertes Modell) in Simulation 1 (links) und Simulation 2 (rechts)

den Simulationen. Das über Korrelationen kalibrierte Modell liefert, wie auch beim Bundesbank-Datensatz, sehr gute Modellkorrelationen. Anders als beim Bundesbank-Datensatz dagegen verhält sich das über Log>Returns kalibrierte Modell: Die Modellkorrelationen sind bei beiden Simulationen relativ nahe an den empirischen Daten. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass der verwendete Datensatz unter der Annahme eines Lévy-Forward-Rate-Modells simuliert wurde.

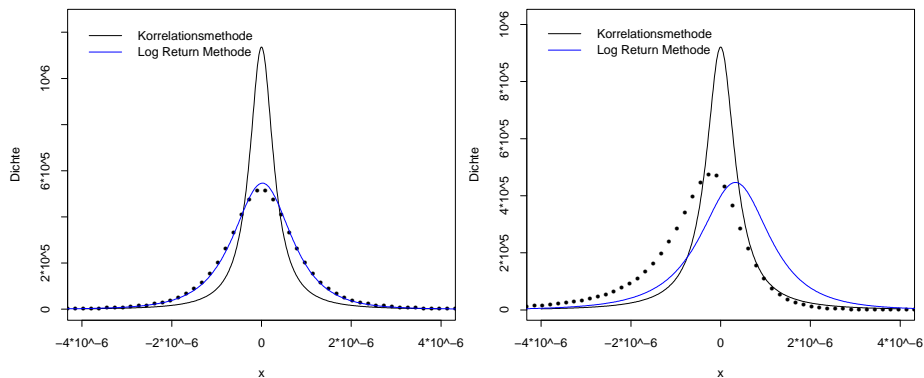


Abbildung 6: Empirische (gepunktet) und Modelldichten für Simulation 1 (links) und Simulation 2 (rechts)

Abbildung 6 zeigt die empirischen und die Modelldichten der Verteilung von L_1 für beide Simulationen. Die Modelldichten bei der Einstellung des Modells über Korrelationen sind deutlich besser als bei der Schätzung anhand des Bundesbank-Datensatzes. Zudem ist auffällig, dass die Modelldichte im über Log>Returns kalibrierten Modell bei der zweiten Simulation stärker als sonst von den empirischen Werten abweicht. Die extreme Schiefe der zugrunde liegenden Verteilung, bedingt durch den extremen Wert für β , scheint dafür verantwortlich.

Die Korrelationen und die Dichte, die im über die Kombination beider Methoden kalibrierten Modell in Simulation 1 entstehen, zeigt Abbildung 7. Das Ergebnis der kombinierten Schätzung bei Simulation 1 liefert ein ähnliches Bild wie das Ergebnis dieser Schätzung beim Bundesbank-Datensatz: Die Korrelationen und die Dichte haben die richtige Größenordnung, sind aber dennoch unrealistisch. Dass die Korrelationen und die Dichte bei der Simulation etwas näher an den realistischen Werten liegen als bei der Schätzung aus den empirischen Daten, lässt sich darauf zurückführen, dass die simulierten Daten exakt auf das Lévy-Forward-Rate-Modell passen. Auf eine Grafik zur kombinierten Schätzung bei Simulation 2 verzichten wir, da sie ähnliche Resultate liefert wie bei Simulation 1.

Auch wenn bei den Simulationen die Ergebnisse weniger drastisch ausfallen als bei den Kalibrierungen anhand des Bundesbank-Datensatzes, so zeigt sich

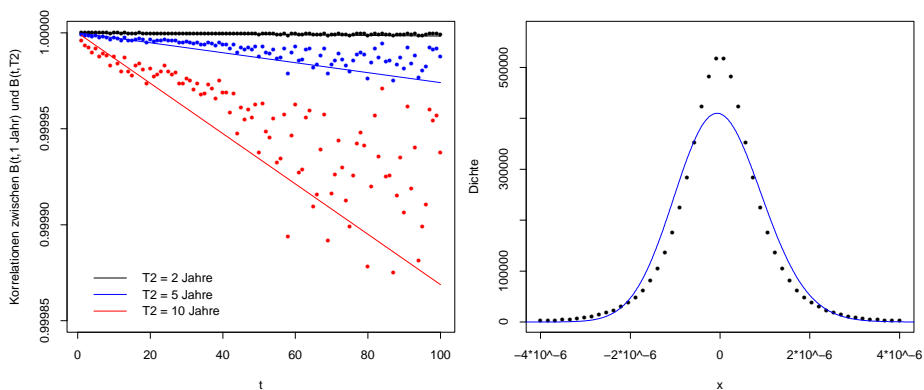


Abbildung 7: Korrelationen und Dichte für die kombinierte Schätzung in Simulation 1

doch auch hier, dass mit der Log-Return-Methode keine perfekten Modellkorrelationen und mit der Korrelationsmethode keine perfekten Wahrscheinlichkeitsdichten erzeugt werden können. Die Modellkorrelationen im über Korrelationen kalibrierten Modell und die Dichte im über Log>Returns kalibrierten Modell sind bei Simulation 1 wie beim Bundesbank-Datensatz sehr realistisch. Bei Simulation 2 erschwert die starke Schiefe der zugrunde liegenden Verteilung die numerische Durchführung der Likelihood-Schätzung bei der Log-Return-Methode, die Korrelationsmethode funktioniert gut. Die Kombination beider Methoden erweist sich auch hier als nicht sinnvoll.

8 Zusammenfassung

Wir haben eine Methode entwickelt, aus einer ausreichend umfangreichen Liste von Bondpreisen unter der Annahme des Lévy-Forward-Rate-Modells empirische Bondpreiskorrelationen zu schätzen. Unter der Annahme einer GH-Verteilung (oder Normalverteilung) ist es somit möglich, in einem zweiten Schritt die Parameter des treibenden Lévy-Prozesses aus diesen Korrelationen zu schätzen.

Wir führten das Verfahren an empirischen und simulierten Bondpreisen durch. Die so kalibrierten Modelle erzeugen sehr realistische Bondpreiskorrelationen. Es ergibt sich jedoch eine unrealistische Wahrscheinlichkeitsdichte von L_1 und mit ihr eine unrealistische Verteilung der Returns der Bonds. Im Heath-Jarrow-Morton-Modell als einem Spezialfall des Lévy-Forward-Rate-Modells ließen sich keine realistischen Bondpreiskorrelationen erzeugen, da die treibende Brownsche Bewegung nicht genügend Flexibilität bietet.

Zum Vergleich führten wir die Schätzungen auch mit der Standardmethode zur Kalibrierung des Lévy-Forward-Rate-Modells unter dem physikalischen Maß durch. Diese Methode, aus den täglichen Log>Returns unabhängige Samples von L_1 zu erzeugen und die Modelldichte an die empirische Dichte von L_1 anzupassen, erzeugt realistische Wahrscheinlichkeitsdichten, aber unrealistische Bondpreiskorrelationen.

Mit dem Ziel, eine Schätzmethode zu finden, die sowohl realistische Korrelationen als auch realistische Dichten liefert, kombinierten wir die beiden Verfahren. Das kombinierte Verfahren erzeugte in der praktischen Durchführung im Gegensatz zu den beiden einzelnen Verfahren sowohl Korrelationen als auch Dichten von der richtigen Größenordnung. Die konkreten Werte der Korrelationen und der Dichten sind jedoch unrealistisch.

Mit unserer Vorgehensweise lässt sich also keine Methode konstruieren, mit der für beide Größen realistische Werte erzeugt werden können. Der Anwender sollte sich also je nach Verwendungszweck für eine der beiden Methoden entscheiden. Für die Betrachtung von Bondpreiskorrelationen sollte ein über Korrelationen kalibriertes Modell verwendet werden und für die Betrachtung der Returns der Bonds sollte man ein über Log>Returns kalibriertes Modell benutzen.

A Details zur Implementierung

Die in Kapitel 7 aufgeführten Ergebnisse der Parameterschätzungen wurden in Splus 6.0 berechnet. In den dabei verwendeten Funktionen wird die Klasse `gh` aus den Freiburg Financial Data Tools [8] benutzt. Zudem wird die Funktion `f.powell` verwendet, die eine Modifikation der Regressionsfunktion `powell` aus [8] ist. In `f.powell` kann man die Maximalanzahl der Schritte angeben, nach der die Regression abbricht. Die Funktion zur Schätzung der Parameter einer NIG- oder Normalverteilung anhand von Korrelationen aus einem Datensatz `P` mit Svensson Parametern hat folgende Gestalt:

```
f.corrshaetzung = function(t, P, betaklein, RLZabnehmend, Simulation, x, k, g, schritte, langeAusgabe,
                           Datenausgabe, Kumulantdelta, Kumulantalpha, HMM)
{
  #f.corrshaetzung führt die Schätzung der Parameter alpha, beta und delta der NIG-Verteilung im Levy-Forward-
  #Rate-Modell mit Ho-Lee-Volatilität über die Korrelationen durch. t ist der Vektor der berücksichtigten
  #Werte t~k aus M. In den beschriebenen Schätzungen wird er als 1:100 gewählt. T_1~k-t~k und T_2~k-t~k aus
  #dieser Menge durchlaufen hier für jedes t~k die Werte 1 bis 10 Jahre. P ist die Matrix, die die Svensson
  #Parameter enthält. Bei unserem Datensatz ist P eine 2707*6 Matrix. Für betaklein == T werden Werte der
  #Zielfunktion, bei denen |betal > 50 ist, stark gewichtet und so als Ergebnisse der Regression
  #ausgeschlossen. Für RLZabnehmend == T wird nicht mit Zeittripeln mit konstanten Restlaufzeiten T_i~k-t~k,
  #sondern mit Tripeln mit konstanten Maturitäten T~k geschätzt. Für Simulation == T wird die Schätzung anhand
  #simulierter Daten durchgeführt. In diesem Fall ist P nicht die Matrix der Svensson Parameter, sondern eine
  #mit der Funktion "f.simulation" erzeugte Matrix. "f.simulation" wird weiter unten beschrieben. x gibt die
  #Länge der Parametervektoren an, insgesamt wird also die Regression mit x[i]*x[2]*x[3] verschiedenen
  #Parametersätzen gestartet. Bei unseren Schätzungen wählen wir x = c(20, 5, 10). k und g geben den kleinsten
  #und den grössten Wert an, der für alpha (erster Wert), beta (2.Wert) und delta (3.Wert) verwendet werden
  #soll. Wir wählen stets k = c(0, -50, 0) und g = c(1000000, 50, 1). schritte gibt die Anzahl der
  #Iterationsschritte im Powell Algorithmus an. Wir setzen es stets = 50. Für langeAusgabe == T gibt
  #f.corrshaetzung eine Matrix aus, die die Ergebnisse aller x[i]*x[2]*x[3] Regressionen enthält. Für
  #langeAusgabe == F wird das Ergebnis der besten Regression als gh Objekt ausgegeben. Für Datenausgabe == T
  #wird statt der Ergebnisse der Regressionen eine list ausgegeben, die die Bondpreise und andere
  #Zwischenergebnisse enthält. Für Kumulantdelta == T werden nur alpha und beta über die Korrelationen
  #geschätzt, delta wird vorher aus den Log>Returns über die Kumulantenmethode in Abhängigkeit von alpha und
  #beta geschätzt. Für Kumulantalpha == T wird alpha über LR/Kumulanten geschätzt. Schätzungen über Kumulanten
  #sind mit dieser Funktion nur möglich, wenn sich auch die Funktion "f.lrschaetzung" im swork Verzeichnis
```

```

#befindet. Kumulantalpha == T ist nur erlaubt, wenn auch Kumulantdelta == T. Deshalb:
if(Kumulantalpha == T & Kumulantdelta == F) {
  return("Fehler: Auch delta muss über Kumulanten bestimmt werden.")
}

#Wenn HJM == T gewählt wird, wird statt der Schätzung der Parameter sigma der Normal-
#verteilung geschätzt.
##
f.corr <- function(t2 = ((1:10) * 260), P = svpara, t1, Simulation)
{
  #f.corr schätzt für Simulation == F aus einer Matrix P mit Svensson Parametern
  #\hat{Corr}(B(t1,t1 + t2[i]),B(t1,t1 + t2[j])) für alle möglichen Kombinationen von i und j. t1 darf
  #dabei nur einen Wert enthalten, t2 muss ein Vektor sein. Alle Zeiten müssen in Tagen angegeben
  #werden. Für Simulation == T wird die Schätzung anhand einer mit f.simulation erzeugten Matrix P
  #vorgenommen.
  ##
  f.bdelta <- function(P = svpara, delta = 0, t1, t2, Simulation)
  {
    #f.bdelta berechnet das in dieser Arbeit definierte B^delta(t1,t1+t2). Wenn man also für
    #delta = 0 angibt, wird einfach B(t1,t1 + t2) berechnet. delta, t1 und t2 müssen hier je
    #in der Einheit Tage eingegeben werden! delta darf auch ein Vektor sein.
    ##
    f.svensson <- function(p, t)
    {
      #Gibt nicht den Wert der Svensson-Kurve zum Parametersatz p zur Restlaufzeit t
      #aus, sondern den zugehörigen Bondpreis bei einem Rückzahlungsbetrag von 1 Euro.
      #t muss hier in Tagen angegeben werden. Dabei kann p mehrere Parametersätze
      #enthalten (als Zeilen einer Matrix), t kann aber nur eine Zahl sein. Das
      #"0.01*" ist eingefügt, weil die Bundesbank die Parameter der Svensson-Kurve so
      #bestimmt, dass die Zinsen in x,yz% ausgegeben werden, die mathematischen Modelle
      #aber davon ausgehen, als Input den Zins in der Form 0,0xyz zu bekommen.
      t <- t/260
      B <- exp(-0.01 * (p[1] * t - p[2] * p[5] * (exp(- t/p[5]) - 1) - p[3] * (t + p[5]
      ) * exp(- t/p[5]) + p[3] * p[5] -p[4] * (t + p[6]) * exp(- t/p[6]) +
      p[4] * p[6]))
    }
  }
}

```



```

return(as.numeric(B))
}

##
f.sim <- function(S, t1, t2)
{
  #Diese Funktion berechnet aus einer mit f.simulation erzeugten Matrix S den
  #(simulierten) Bondpreis B(t1,t1+t2). t2 ist also die Restlaufzeit und nicht die
  #Maturität. t1 und t2 müssen in Tagen angegeben werden. t2 darf nur ein Element
  #enthalten. In dieser Rechnung wird A als konstant = 0 angenommen.
  if(length(t2) != 1) {
    return("Fehler in f.sim: length(t2) != 1")
  }
  else {
    B <- rep(NA, times = length(t1))
    B[t1 == 0] <- S[t2, 1]
    B[t1 != 0] <- S[t1[t1 != 0] + t2, 1] / S[t1[t1 != 0], 1] * exp(t2 *
      S[t1[t1 != 0], 2])
    return(B)
  }
}

##
if (Simulation == T) {
  x <- (f.sim(P, t1 + delta, t2) * f.sim(P, 0, t1 + t2) * f.sim(P, delta, t1)) /
    f.sim(P, 0, t1) / f.sim(P, delta, t1 + t2)
}

else {
  #Definition der Indices für f.svensson:
  i1 <- delta + t1 + 1
  i2 <- rep(1, times = length(delta))
  i3 <- delta + 1
  x <- (((f.svensson(P[i1, ], t2) * f.svensson(P[i2, ], t2 + t1)) /
    f.svensson(P[i2, ], t1) * f.svensson(P[i3, ], t1)) /
    f.svensson(P[i3, ], t2 + t1))
}

```

```

    return(as.numeric(x))
  }

##
if(Simulation == T) {
  u <- dim(P)[1] - 2600
}
else {
  u <- dim(P)[1]
}
d <- floor((u - t1 - 1)/t1)
delta <- t1 * (0:d)
M <- matrix(NA, nrow = length(delta), ncol = length(t2))
L <- list(t2, t2)
for(i in 1:length(t2)) {
  M[, i] <- f.bdelta(P, delta, t1, t2[i], Simulation)
  L[[1]][i] <- paste("B(", t1, ", ", t1, "+", (t2[i])/ 260, "Jahre)", sep = "")
  L[[2]][i] <- paste("B(", t1, ", ", t1, "+", (t2[i])/ 260, "Jahre)", sep = "")
}

corr <- cor(M)
dimnames(corr) <- L
return(corr)
}

##
f.zielfunktion <- function(daten, p)
{
  #Dies ist die im Powell Algorithmus zu minimierende Funktion bei NiQ-Verteilungsannahme mit Ho-Lee-
  #Volatilität. daten muss dabei eine list sein mit daten[[1]] = t (Vektor der Beobachtungzeitpunkte
  #in Tagen), daten[[2]] = tj (Eine 45*2 Matrix, die die Restlaufzeiten der Bonds in Tagen enthält,
  #und zwar in jeder Zeile die jeweils zusammengehörigen Restlaufzeiten), daten[[3]] = y (Matrix der
  #Korrelationen zwischen den Bondpreisen für die Restlaufzeiten, die in tj in einer Zeile stehen),
  #für daten[[4]] = betaklein == T wird es stark ungünstig gewertet, wenn |beta| > 50. p muss die
  #Startwerte der zu schätzenden Parameter p[1] = alpha, p[2] = beta und p[3] = delta enthalten.
  if(daten[[4]][1] == T) {
    b <- p

```

```

a <- sqrt((3 * b * daten[[5]][2])/daten[[5]][3] + b^2)
}
else {
  a <- p[1]
  b <- p[2]
}
if(daten[[4]][2] == T) {
  d <- daten[[5]][2] * (sqrt(a^2 - b^2)^3/a^2)
}
else {
  d <- p[3]
}
t <- daten[[1]]
tj <- daten[[2]]
y <- daten[[3]]
betaklein <- daten[[4]][3]
n <- sqrt(a^2 - b^2) * d * t
x <- ((exp(n - t * d * sqrt(a^2 - (b + tj[, 1] + tj[, 2])^2)) - exp(n - t * d * (sqrt(a^2 - (b +
tj[, 1])^2) + sqrt(a^2 - (b + tj[, 2])^2) - sqrt(a^2 - b^2))))/(sqrt(exp(n - t * d *
sqrt(a^2 - (b + 2 * tj[, 1])^2) - exp(n + t * d * (-2 * sqrt(a^2 - (b + tj[, 1])^2) +
sqrt(a^2 - b^2)))) * sqrt(exp(n - t * d * sqrt(a^2 - (b + 2 * tj[, 2])^2) - exp(n + t *
d * (-2 * sqrt(a^2 - (b + tj[, 2])^2) + sqrt(a^2 - b^2)))))) - y)
if(d < 0 | (abs(b) > 50 & betaklein == T) | any(x > 2) | any(is.na(x) == T)) {
  return((1000 * length(x))^2)
}
else {
  return(sum(x^2))
}
}
##
#In diesem Abschnitt wird die list daten erstellt, die der Powell Minimierungsfunktion übergeben wird.
#Zunächst wird die Matrix der Restlaufzeiten tj erstellt:
a <- cbind(rep(1, times = 9), 2:10)
b <- a

```

```

for (i in 1:8) {
  b <- rbind(b, (a + i)[1:(9 - i)], ]
}
tj <- b * 260
daten <- list(sort(rep(t, times = dim(tj)[1])), cbind(rep(tj[, 1], times = length(t)), rep(tj[, 2],
times = length(t))))
y <- rep(NA, times = length(daten[[1]]))
for (i in 1:length(y)) {
  y[i] <- f.corr(t2 = (1:10) * 260 - RLZabnehmend * daten[[1]][i], P, t1 = daten[[1]][i],
Simulation)[daten[[2]][i, 1]/260, daten[[2]][i, 2]/260]
}
daten[[2]] <- daten[[2]] - RLZabnehmend * daten[[1]]
daten[[3]] <- y
daten[[4]] <- c(Kumulantalalpha, Kumulantdelta, betaklein)
##
#Nun werden die Vektoren p1, p2 und p3 erstellt, die die Startwerte von alpha, beta und delta für die
#Regression beinhalten. Zudem wird die Matrix m initiiert, die dann mit den Ergebnissen der Regressionen
#gefüllt und für langeAusgabe == T ausgegeben wird.
if (HJM == F) {
  x[1] <- (1 - Kumulantalalpha) * x[1] + Kumulantalalpha * x[2]
  x[2] <- (1 - Kumulantalalpha) * x[2] + Kumulantalalpha
  g[1] <- (1 - Kumulantalalpha) * g[1] + Kumulantalalpha * g[2]
  k[1] <- (1 - Kumulantalalpha) * k[1] + Kumulantalalpha * k[2]
  x[3] <- (1 - Kumulantdelta) * x[3] + Kumulantdelta
  p1 <- (ceiling(1:(x[1] * x[2] * x[3])/(x[2] * x[3])) - 1) * ((g[1] - k[1])/(x[1] - min(1, x[1] -
1))) + k[1]
  if (Kumulantalalpha == T) {
    p2 <- p1
    p1 <- rep(NA, times = x[1] * x[2] * x[3])
  }
  else {
    p2 <- rep((ceiling(1:(x[2] * x[3])/x[3]) - 1) * ((g[2] - k[2])/(x[2] - min(1, x[2] - 1))) +
k[2], x[1])
  }
}

```

```

if(Kumulantdelta == T) {
  p3 <- rep(NA, times = x[1] * x[2] * x[3])
  daten[[5]] <- f.lrschaetzung(P, 260 * (1:10), T, Simulation, T)[[1]]
  if(daten[[5]][3] == 0) {
    return("Kumulante k_3 = 0, Kumulanten-Korrelationen Schätzung deshalb nicht möglich.")
  }
}
else {
  p3 <- rep(0:(x[3] - 1) * ((g[3] - k[3])/(x[3] - min(1, x[3] - 1))) + k[3], (x[2] * x[1]))
}
m <- cbind(matrix(NA, nrow = (x[1] * x[2] * x[3]), ncol = 4), p1, p2, p3)
dimnames(m) <- list(1:(x[1] * x[2] * x[3]), c("Minimum", "alpha", "beta", "delta", "p1", "p2", "p3"))
##
#Nun folgt die eigentliche Durchführung der Regressionen, also die (x[1] * x[2] * x[3])-fache Hinter-
#einanderausführung von "f.powell".
if(Datenausgabe == F) {
  p <- as.matrix(cbind(p1, p2, p3)[, c(-Kumulantalalpha, -Kumulantdelta * 3, -4)])
  #-4 in der Zuweisung von p wird benötigt, falls Kumulantalalpha und Kumulantdelta == F
  for(n in 1:(x[1] * x[2] * x[3])) {
    z <- f.powell(f.zielfunktion, p[n, ], daten, schritte = schritte)
    m[n, 1] <- z$fpmin
    if(Kumulantalalpha == T) {
      m[n, 3] <- z$pm1[1]
      m[n, 2] <- sqrt((3 * m[n, 3] * daten[[5]][2])/daten[[5]][3] + m[n, 3]^2)
    }
    else {
      m[n, 3] <- z$pm2[2]
      m[n, 2] <- z$pm1[1]
    }
    if(Kumulantdelta == F) {
      m[n, 4] <- z$pm3[3]
    }
    else {
      m[n, 4] <- daten[[5]][2] * (sqrt(m[n, 2]^2 - m[n, 3]^2))^3/m[n, 2]^2)
    }
  }
}

```

```

    }
  }
  m <- m[sort.list(m[, 1]), ]
  if (langeAusgabe == T) {
    return(m)
  }
  if (langeAusgabe == F) {
    return(gh(1, m[1, 2], m[1, 3], m[1, 4], 0, -0.5, interactive = F))
  }
}
else {
  return(daten)
}
}
else {
  #Hier wird der Parameter sigma der Normalverteilung geschätzt, dazu wird zunächst die Zielfunktion
  #definiert:
  f.BBzielfunktion <- function(daten, p)
  {
    t <- daten[[1]]
    tj <- daten[[2]]
    y <- daten[[3]]
    x <- (((exp(p^2 * t * tj[, 1] * tj[, 2]) - 1)/sqrt(exp(p^2 * t * tj[, 1]^2) - 1))/sqrt(
      exp(p^2 * t * tj[, 2]^2 - 1)) - y)
    if (any(is.na(x) == T)) {
      return(length(x) * 1000^2)
    }
    else {
      return(sum(x^2))
    }
  }
  p <- (((1:x[1]) - 1) * (g[1] - k[1]))/(x[1] - min(1, x[1] - 1)) + k[1]
  m <- cbind(matrix(NA, nrow = x[1], ncol = 2), p)
  dimnames(m) <- list(1:x[1], c("Minimum", "sigma", "p"))
}

```

```

for (n in 1:x[1]) {
  z <- f.powell(f.BBziel funktion , p[n], daten , schritte = schritte)
  m[n, 1] <- z$fpmin
  m[n, 2] <- z$ppmin
}
m <- m[sort.list(m[, 1]), ]
return(m)
}

```

Um diese Funktion mit der Einstellung `Simulation == T` laufen zu lassen, muss man ihr in der Eingabe für die Variable `P` eine Matrix aus Startwerten und Samples der Zuwächse des zu simulierenden Lévy-Prozesses übergeben, die man mit folgender Funktion erzeugen kann:

```

f.simulation = function(P, l, V)
{
  #Diese Funktion erstellt eine l*2 Matrix, bei der in der ersten Spalte B(0,t) und in der zweiten Spalte L_t
  #steht. In der i-ten Zeile der zweiten Spalte steht der Werte von L_{i Tage}. B(0,t) wird aus einem
  #beliebigen Svensson Parametersatz P erzeugt und L_t wird mittels der Funktion rniig simuliert. Als Eingabe
  #verlangt f.simulation das GH-Objekt V, das die Parameter des MIG verteilten Levy-Prozesses enthält, der
  #die Grundlage der Simulation bildet. l muss der Länge des zu simulierenden Datensatzes plus der längsten
  #Restlaufzeit entsprechen.
  f.svensson <- function(p, t)
  {
    t <- t/260
    B <- exp(-0.01 * (p[1] * t - p[2] * p[5] * (exp(- t/p[5]) - 1) - p[3] * (t + p[5]) * exp(- t/p[5]
    ) + p[3] * p[5] - p[4] * (t + p[6]) * exp(- t/p[6]) + p[4] * p[6]))
    return(as.numeric(B))
  }
  m <- matrix(NA, ncol = 2, nrow = l)
  for (i in 1:l) {
    m[i, 1] <- f.svensson(P, i)
  }
  m[, 2] <- rniig(V, n = l)
}

```

```

m[, 2] <- cumsum(m[, 2])
return(m)
}

```

Für Parameterschätzungen über Log>Returns benutzen wir folgende Funktion:

```

f.lrschaetzung = function(P = svpara, n = 260 * (1:10), Datenausgabe = F,
Simulation = F, Kumulantenmethode = F)
{
#Für Simulation == F schätzt f.lrschaetzung aus einer Matrix P von Svensson Parametern die Parameter der NIG-
#Verteilung im Levy-Forward-Rate-Modell wie in Kapitel 5.3 beschrieben. Dabei ist n der Vektor der
#Restlaufzeiten in Tagen, über die die Regression durch den Ursprung durchgeführt wird. Für Simulation == T
#werden aus einer mit der Funktion f.simulation erstellten Matrix P die NIG Parameter geschätzt. Für
#Datenausgabe == T werden nicht die NIG Parameter, sondern die Log>Returns und die Samples von L_1 ausgegeben.
##
f.svensson <- function(p, t)
{
t <- t/260
B <- exp(-0.01 * (p[1] * t - p[2] * p[5] * (exp(-t/p[5]) - 1) - p[3] * (t + p[5]) * exp(-t/p[5]) +
p[3] * p[5] - p[4] * (t + p[6]) * exp(-t/p[6]) + p[4] * p[6]))
return(as.numeric(B))
}
##
f.sim <- function(S, t1, t2)
{
B <- S[t1 + t2, 1]/S[t1, 1] * exp(t2 * S[t1, 2])
return(B)
}
##
if(Simulation == T) {
u <- dim(P)[1] - 2600
lr <- matrix(NA, nrow = (u - 1), ncol = length(n))
for(i in 1:length(n)) {
lr[, i] <- log(f.sim(P, 2:u, (n[i] - 1))) + log(f.sim(P, 1:(u - 1), 1)) - log(f.sim(P, 1:(u -
1), n[i]))
}
}
}

```



```

    }
else {
  u <- dim(P)[1]
  lr <- matrix(NA, nrow = (u - 1), ncol = length(n))
  for(i in 1:length(n)) {
    lr[, i] <- log(f.svensson(P[2:dim(P)[1], ], (n[i] - 1))) + log(f.svensson(P[1:(dim(P)[1] - 1), ], n[i]))
  }
}
if(any(is.na(lr)) == T) {
  return("Fehler: Mindestens ein Log-Return hat den Wert NA.")
}
else {
  EW <- rep(NA, times = length(n))
  for(j in 1:length(n)) {
    EW <- mean(lr[, j])
  }
  ll <- rep(NA, times = u - 1)
  x <- (n - 1)
  for(i in 1:(u - 1)) {
    regrY <- lr[, i, ] - EW
    ll[i] <- as.numeric(coefficients(lm(regrY ~ -1 + x)))
  }
  if(Kumulantenmethode == F) {
    if(Datenausgabe == T) {
      return(list(ll, lr))
    }
  } else {
    return(ghe.newton(ll, -0.5))
  }
}
else {
  #Berechnung der k-Statistiken als Schätzer für die Kumulanten

```

```

k1 <- sum(l1)/length(l1)
k2 <- sum((l1 - k1)^2)/length(l1) - 1
k3 <- (sum((l1 - k1)^3) * length(l1)) / (length(l1) - 1) / (length(l1) - 2)
k4 <- (sum((l1 - k1)^4) * length(l1) * (length(l1) + 1)) / (length(l1) - 1) / (length(l1) - 2) /
  (length(l1) - 3)
if(k3 == 0) {
  a <- sqrt((3 * k2)/k4)
  b <- 0
  d <- a * k2
  m <- k1
}
else {
  b <- 1 / (k4/k3 - (5 * k3)/3/k2)
  a <- sqrt((3 * b * k2)/k3 + b^2)
  d <- sqrt(a^2 - b^2)^3/a^2 * k2
  m <- k1 - (d * b)/sqrt(a^2 - b^2)
}
if(Datenausgabe == T) {
  return(list(c(k1, k2, k3, k4), l1, lr))
}
else {
  return(invisible(gh(1, a, b, d, m, -0.5, methode = paste("Kumulantenmethode / ",
    length(l1), " obs"), interactive = F)))
}
}
}

```

Literatur

- [1] Abramowitz, M. und Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1965.
- [2] Barndorff-Nielsen, O. E. und Halgren, C.: Infinite Divisibility of the Hyperbolic and Generalized Inverse Gaussian Distributions. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 38: 309-312, 1977.
- [3] Brigo, D. und Mercurio, F.: *Interest Rate Models: Theory and Practice*. Springer, 2001.
- [4] Cont, R. und Tankov, P.: *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall / CRC Press, 2003.
- [5] Cox, J. C., Ingersoll, J. E. und Ross, S. A.: A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53: 385-407, 1985.
- [6] Eberlein, E.: Application of Generalized Hyperbolic Lévy Motions to Finance. *Lévy Processes: Theory and Applications*, Barndorff-Nielsen, O. E., Mikosch, T. und Resnick, S. S. (Hrsg.), Birkhäuser Verlag, Boston, 319-337, 2001.
- [7] Eberlein, E.: Jump-type Lévy processes. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: *Handbook of Financial Time Series*, Springer, 2009.
- [8] Eberlein, E., Ehret, A., von Hammerstein, E. A., Kristen, J., Lübke, O., Özkan, F., Prause, K., Raible, S., Weick, O., Wiesendorfer-Zahn, M. und Wirth, R.: *Freiburg Financial Data Tools*. Mathematische Stochastik, Universität Freiburg, 2008.
- [9] Eberlein E., Jacod J. und Raible S.: Lévy Term Structure Models: no-Arbitrage and Completeness. *Finance and Stochastics* 9: 67-88, 2005.
- [10] Eberlein, E. und Janssen, A.: *Correlations in Lévy Interest Rate Models*. Preprint, Universität Freiburg, 2007.
- [11] Eberlein, E. und Kluge, W.: Calibration of Lévy Term Structure Models. *Advances in Mathematical Finance*. Birkhäuser Verlag, 2007.
- [12] Eberlein, E. und Kluge, W.: Exact Pricing Formulae for Caps and Swaptions in a Lévy Term Structure Model. *Journal of Computational Finance*, 9(2): 99-125, 2006.
- [13] Eberlein, E. und Özkan, F.: The Defaultable Lévy Term Structure: Ratings and Restructuring. *Mathematical Finance*, 13: 277-300, 2003.
- [14] Eberlein, E. und Özkan, F.: The Lévy LIBOR Model. *Finance and Stochastics*, 9: 327-348, 2005.

- [15] Eberlein, E., Papapantoleon, A. und Shiryaev, A.: On the Duality Principle in Option Pricing: Semimartingale Setting. *Finance and Stochastics*, 12 (2): 265-292, 2008.
- [16] Eberlein, E. und Raible, S.: Term Structure Models Driven by General Lévy Processes. *Mathematical Finance*, 9: 31-53, 1999.
- [17] Heath, E., Jarrow, R. A. und Morton, A.: Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, 60: 77-105, 1992.
- [18] Jacod, J. und Shiryaev, A.: *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer, 2002.
- [19] Kluge, W.: *Kalibrierung von Lévy Zinsstrukturmodellen*. Diplomarbeit, Universität Freiburg, 2002.
- [20] Kluge, W.: *Time-Inhomogenous Lévy Processes in Interest Rate and Credit Risk Models*. Dissertation, Universität Freiburg, 2005.
- [21] Protter, P. E.: *Stochastic Integration and Differential Equations*. Stochastic Modelling and Applied Probability Band 21, Springer, Version 2.1, 2005.
- [22] Raible, S.: *Lévy Processes in Finance: Theory, Numerics, and Empirical Facts*. Dissertation, Universität Freiburg, 2000.
- [23] Svensson, L.: Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-94. *IMF Working Paper*, 114, 1994.
- [24] Vasiček, O. A.: An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5: 177-188, 1977.

Erklärung

Hiermit bestätige ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Freiburg, den 8. April 2009

