

11 Terme

- “Worte mit Struktur”
- weitere Verallgemeinerung von
 - Induktion
 - Primitiver Rekursion
- Grundlage für
 - interessante Datenstrukturen (Bäume)
 - Beschreibung von Syntax
 - Beschreibung von Semantik

11.1 Rangalphabet

Definition Ein **Rangalphabet** ist ein Paar $(\Sigma; \sigma)$ wobei

- $\Sigma = \{F_1, \dots, F_m\}$ ist eine endliche Menge von **Operationssymbolen** und
- $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbf{N}$ ist eine Abbildung (die *Stelligkeit*).

Schreibweisen

- $\Sigma^{(n)} = \{F \in \Sigma \mid \sigma(F) = n\}$
die Menge der n -stelligen Operationssymbole
- $F^{(n)} \in \Sigma$
ist gleichbedeutend mit $F \in \Sigma^{(n)}$
 F ist n -stelliges Operationssymbol

Beispiele

- Ein Rangalphabet für Zahlen mit Rechenoperationen:

$$\Omega^{(0)} = \{0\}$$

$$\Omega^{(1)} = \{\textit{succ}, \textit{pred}\} \quad \text{einstellige Operationssymbole}$$

$$\Omega^{(2)} = \{+, -, *\}$$

- Rangalphabet für Formeln der Aussagenlogik

$$\Gamma^{(0)} = \{\mathbf{0}, \mathbf{L}\} \quad \text{Konstanten}$$

$$\Gamma^{(1)} = \{\neg\} \quad \text{einstellige Symbole}$$

$$\Gamma^{(2)} = \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \quad \text{zweistellige Symbole}$$

- **Achtung:** Nur Symbol mit Stelligkeit, keine Bedeutung impliziert!

11.2 Definition: Terme mit Variablen

Sei $(\Sigma; \sigma)$ ein Rangalphabet.

Sei X eine Menge von **Variablen** mit $\Sigma \cap X = \emptyset$.

Die Menge der Σ -**Terme über** X ist die kleinste Menge $T_\Sigma(X) \subseteq (X \cup \Sigma)^*$ mit den Eigenschaften:

1. $X \subseteq T_\Sigma(X)$
jede Variable ist ein Term
2. Falls $t_1, \dots, t_n \in T_\Sigma(X)$ und $F \in \Sigma^{(n)}$, dann auch $t = F t_1 \dots t_n \in T_\Sigma(X)$.
Die Terme t_1, \dots, t_n heißen **(direkte) Teilterme von** t .

Bemerkung: • $F t_1 \dots t_n$ steht für $F \text{ app}(t_1, \text{app}(\dots, t_n) \dots)$
• Statt $T_\Sigma(\emptyset)$ schreibe T_Σ .

Beispiele

Sei $X = \{a, b, c\}$ eine Menge von Variablen.

- $\Omega = \{0^{(0)}, succ^{(1)}, pred^{(1)}, +^{(2)}, -^{(2)}, *^{(2)}\}$

Ω -Terme über X sind:

$$\begin{array}{cccc}
 0 & a & b & c \\
 succ\ 0 & pred\ b & +\ a\ 0 & \\
 & +\ * & a\ b\ c &
 \end{array}$$

- $\Gamma = \{\mathbf{O}^{(0)}, \mathbf{L}^{(0)}, \neg^{(1)}, \wedge^{(2)}, \vee^{(2)}, \Rightarrow^{(2)}, \Leftrightarrow^{(2)}\}$

Γ -Terme über X sind:

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{O} & \mathbf{L} & a & b & c \\
 \neg\mathbf{O} & \neg a & \wedge\ a\ b & & \\
 & \wedge\ \vee\ a & \mathbf{L}\ \neg b & &
 \end{array}$$

11.3 Eindeutige Termzerlegung

Satz Jeder Term $t \in T_\Sigma(X)$ ist entweder

atomar:

$t \in X$ oder $t \in \Sigma^{(0)}$ oder

zusammengesetzt

$t = F t_1 \dots t_n$ mit $F \in \Sigma^{(n)}$, $n \geq 1$.

Dabei sind die Terme $t_1 \dots t_n$ eindeutig bestimmt.

Beweis

- beachte $T_\Sigma(X) \subseteq (\Sigma \cup X)^*$
- kann durch Wortinduktion über $w \in (\Sigma \cup X)^*$ oder durch vollständige Induktion über $\text{len}(w) \in \mathbf{N}$ geschehen

- Aussage muss verallgemeinert werden zu:

Für alle $w \in (\Sigma \cup X)^*$ gilt:

Falls $w = t_1 \dots t_n$ und $w = t'_1 \dots t'_m$

mit $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m \in T_\Sigma(X)$,

dann gilt $n = m$ und $(\forall 1 \leq i \leq n) t_i = t'_i$.

- Ursprüngliche Aussage: setze $n = 1$

11.4 Notation für Terme

11.4.1 Polnische Notation (Lukasiewicz)

Schreibweise nach Definition 11.2:

$$\wedge \vee a \mathbf{L} \neg b$$

11.4.2 Umgekehrte Polnische Notation (UPN, RPN)

erst Teilterme, dann Operationssymbol

$$a \mathbf{L} \vee b \neg \wedge$$

nicht: Polnische Notation rückwärts

11.4.3 Präfixnotation mit Klammern

Schreibweise: $F(t_1, \dots, t_n)$ für $F^{(n)} \in \Sigma$

$$\wedge(\vee(a, \mathbf{L}), \neg(b))$$

11.4.4 Infix-Notation

Schreibweise für zweistellige Operatoren im Zusammenhang mit 11.4.3

$$(a \vee \mathbf{L}) \wedge (\neg b)$$

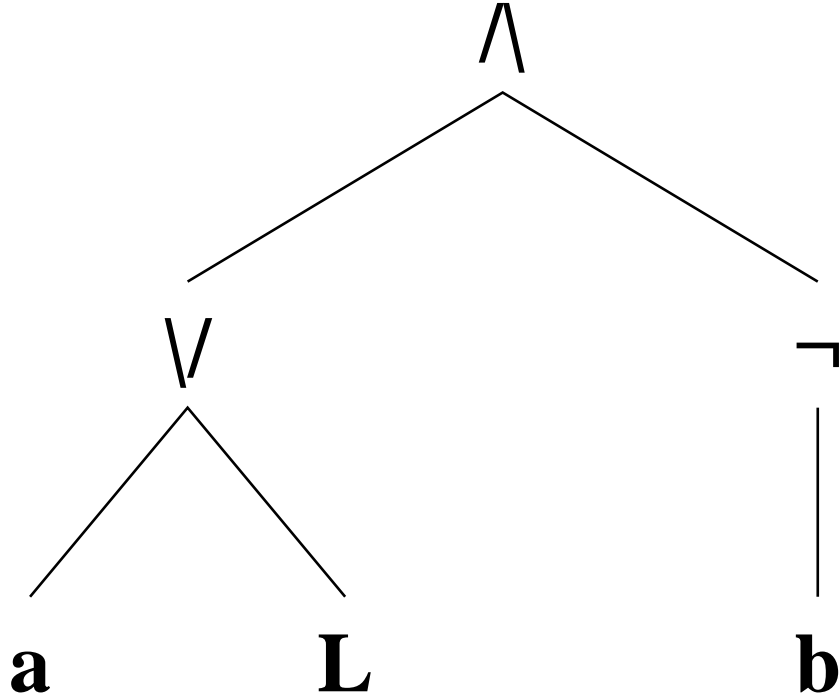
Vorrangregeln zum Einsparen von Klammern

11.4.5 Alternative Präfixnotation

Schreibweise: $(F t_1 \dots t_n)$ für $F^{(n)} \in \Sigma$

$$(\wedge (\vee a \mathbf{L}) (\neg b))$$

11.4.6 Baumnotation



11.5 Bedeutung für Terme

Definition Sei $(\Sigma; \sigma)$ ein Rangalphabet. Sei A eine Menge.

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei

$$\alpha : \Sigma^{(n)} \rightarrow \{f \mid f : A^n \rightarrow A\}$$

eine Abbildung, die einem n -stelligen Funktionssymbol eine n -stellige Abbildung über A zuordnet: $F_A := \alpha(F)$.

Dann ist $\mathcal{A} = (A; \alpha)$ eine Σ -**Algebra**.

Die Funktionen F_A heißen **Operationen** der Algebra.

Die Menge A heißt **Trägermenge** der Algebra \mathcal{A} .

Beispiel Rangalphabet $\Gamma = \{\mathbf{O}^{(0)}, \mathbf{L}^{(0)}, \neg^{(1)}, \wedge^{(2)}, \vee^{(2)}\}$

Standardinterpretation: Boolesche Algebra

- Trägermenge $B = \{0, 1\} \subseteq \mathbf{N}$
- $\mathbf{O}_B = 0$ 0-stellige Symbole werden zu Konstanten
- $\mathbf{L}_B = 1$
- $\neg_B(x) = 1 - x$
- $\wedge_B(x, y) = \min(x, y)$
- $\vee_B(x, y) = \max(x, y)$

Andere Interpretation

- Trägermenge $C = \{*\}$
- $\mathbf{O}_C = *$
- $\mathbf{L}_C = *$
- $\neg_C(x) = x$
- $\wedge_C(x, y) = *$
- $\vee_C(x, y) = *$

11.6 Interpretation von Termen

Satz Sei X eine Menge von Variablen, Σ ein Rangalphabet, $\mathcal{A} = (A, \alpha)$ eine Σ -Algebra und $f : X \rightarrow A$ eine **Belegung der Variablen**.

Dann wird durch:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= f(x) && \text{falls } x \in X \\ (*) \quad \hat{f}(F t_1 \dots t_n) &= F_{\mathcal{A}}(\hat{f}(t_1), \dots, \hat{f}(t_n)) \end{aligned}$$

eine Abbildung $\hat{f} : T_{\Sigma}(X) \rightarrow A$ eindeutig bestimmt.

Bemerkungen:

- Die Abbildung \hat{f} heißt **Auswertung** oder **Interpretation**.
- Die Abbildung \hat{f} ist ein **Katamorphismus** (wegen (*)).

Beispiel: Auswertung von logischen Formeln

Betrachte wieder die Γ -Algebra B :

Sei $X = \{a, b\}$ und $f : X \rightarrow B$ definiert durch $f(a) = 0$ und $f(b) = 1$.

$$\begin{aligned}\hat{f}(\wedge a \vee b \neg a) &= \wedge_B(\hat{f}(a), \hat{f}(\vee b \neg a)) \\ &= \min(0, \vee_B(\hat{f}(b), \hat{f}(\neg a))) \\ &= \min(0, \max(1, \neg_B(\hat{f}(a)))) \\ &= \min(0, \max(1, 1 - 0)) \\ &= 0\end{aligned}$$

Beispiel: Tiefe eines Terms

Betrachte die Algebra $D = \mathbf{N}$ (zu beliebigem Σ) mit

$$\begin{aligned} F_D &= 0 && \text{falls } F \in \Sigma^{(0)} \\ F_D(x_1, \dots, x_n) &= 1 + \max(x_1, \dots, x_n) && \text{falls } F \in \Sigma^{(n)}, n > 0 \end{aligned}$$

Mit $d : X \rightarrow D$ definiert durch $d(x) = 0$ liefert $\hat{d}(t)$ die **Tiefe des Terms** t , d.h. die maximale Schachtelungstiefe von Operatoren.

$$\begin{aligned} \hat{d}(\wedge a \vee b \neg a) &= \wedge_D(\hat{d}(a), \hat{d}(\vee b \neg a)) \\ &= 1 + \max(0, \vee_D(\hat{d}(b), \hat{d}(\neg a))) \\ &= 1 + \max(0, 1 + \max(0, \neg_D(\hat{d}(a)))) \\ &= 1 + \max(0, 1 + \max(0, 1 + \max(0))) \\ &= 3 \end{aligned}$$

11.7 Beweisprinzip: Termination

Eine Eigenschaft $P(t)$ gilt für alle $t \in T_\Sigma(X)$ falls

[Induktionsbasis 1]

$(\forall x \in X) P(x)$ gilt und

[Induktionsbasis 2]

$(\forall F \in \Sigma^{(0)}) P(F)$ gilt und

[Induktionsschritte]

$(\forall n > 0) (\forall F \in \Sigma^{(n)}) (\forall t_1 \dots t_n \in T_\Sigma) P(t_1) \wedge \dots \wedge P(t_n) \Rightarrow P(F t_1 \dots t_n)$

D.h., falls $P(t_1)$ und \dots und $P(t_n)$ für beliebige t_1, \dots, t_n gelten, so gilt auch $P(F t_1 \dots t_n)$, wobei F ein beliebiges Operationssymbol der Stelligkeit n ist.

11.8 Zusammenfassung

- Terme beschreiben die syntaktische Struktur von
 - logischen Formeln
 - arithmetischen Ausdrücken
 - Programmen
- Algebren liefern die Interpretation (Bedeutung, Semantik) von Termen
 - Wahrheitswert einer Formel
 - Wert eines arithmetischen Ausdrucks
 - Bedeutung eines Programms